

1. Continuité en un point

DÉFINITION. Soit une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et un point $a \in D$. On dit que f est *continue* en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

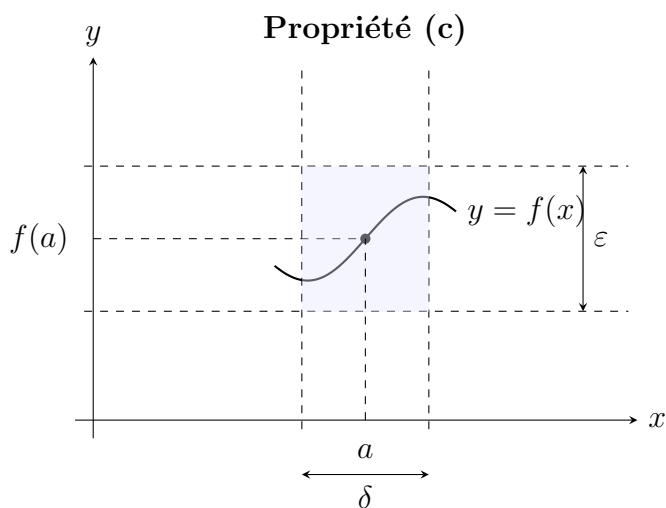
PROPOSITION 1.1. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in D$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) f est continue en a
- (b) pour toute suite $(a_n) \subset D$,

$$a_n \rightarrow a \implies f(a_n) \rightarrow f(a).$$

- (c) pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\delta > 0$ tel que

$$x \in D \text{ et } |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$



PREUVE. D'après la définition de la limite de f en un point et la proposition 3.43. du chapitre 3, la relation $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ est équivalente aux deux propriétés suivantes :

$$x \in D \text{ et } 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon;$$

$$a_n \neq a \text{ pour tout } n, \text{ et } a_n \rightarrow a \implies f(a_n) \rightarrow f(a).$$

Il reste à observer que ces implications restent valables sans les hypothèses $0 < |x - a|$ (c'est-à-dire $x \neq a$) et $a_n \neq a$ pour tout n . □

PROPOSITION 1.2.

Soient deux fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, un point $a \in D$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (i) Si f et g sont continues en a , alors $\lambda f + g$ est continue en a .
- (ii) Si f et g sont continues en a , et $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est aussi continue en a .

PROPOSITION 1.3. Soient deux fonctions $f : D \rightarrow E$ et $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in D$.
Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a .

2. Continuité sur un ensemble

DÉFINITION.

Soit une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est *continue* sur D si elle est continue en tout point de D .

EXEMPLES 2.4.

- (i) Les polynômes sont continus sur \mathbb{R} .
- (ii) La fonction exponentielle est continue sur \mathbb{R} .
- (iii) Les fonctions sinus et le cosinus sont continues sur \mathbb{R} .
- (iv) la fonction logarithme est continue sur $]0, +\infty[$.
- (v) Les fractions rationnelles $\frac{f}{g}$ avec f et g des polynômes, sont continues sur l'ensemble $\{x : g(x) \neq 0\}$.

PROPOSITION 2.5. Soient deux fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (i) Si f et g sont continues, alors $\lambda f + g$ est continue sur D .
- (ii) Si f et g sont continues, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur $D \setminus g^{-1}(\{0\})$.

PROPOSITION 2.6. Soient deux fonctions $f : D \rightarrow E$ et $g : E \rightarrow \mathbb{R}$.
Si f et g sont continues, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue.

Il existe une notion renforcée de la continuité, qui est souvent plus facile à vérifier :

DÉFINITION. Soit $L \geq 0$. Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *L-lipschitzienne*, si

$$\forall x \in D, \forall y \in D, \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Une fonction f est dite *lipschitzienne*, s'il existe $L \geq 0$ telle que f est *L-lipschitzienne*.

REMARQUE 2.7. De manière équivalente, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne si et seulement si l'ensemble

$$\left\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y} : x, y \in D, \quad x \neq y \right\}$$

est borné.

PROPOSITION 2.8. Toute fonction lipschitzienne est continue.

PREUVE. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ *L-lipschitzienne* avec $L \geq 0$. On fixe $a \in D$ quelconque. Par définition, il existe $L \geq 0$ tel que pour tout $x \in D$, on a

$$|f(x) - f(a)| \leq L|x - a| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0,$$

et donc $f(x) \rightarrow f(a)$. □

EXEMPLES 2.9.

- (i) Les fonctions constantes sont 0-lipschitziennes.
- (ii) Les fonctions affines $x \mapsto bx + c$ sont $|b|$ -lipschitziennes.
- (iii) La fonction valeur absolue est 1-lipschitzienne.

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

- (iv) Les fonctions sin et cos sont 1-lipschitziennes.
- (v) La fonction racine carrée n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$ parce que l'ensemble

$$\left\{ \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} : x, y \in [0, +\infty[, \quad x \neq y \right\}$$

n'est pas borné. En effet, pour tout $x \in [0, 1]$ (en choisissant $y = 0$), on a

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty.$$

3. Fonctions continues sur des intervalles

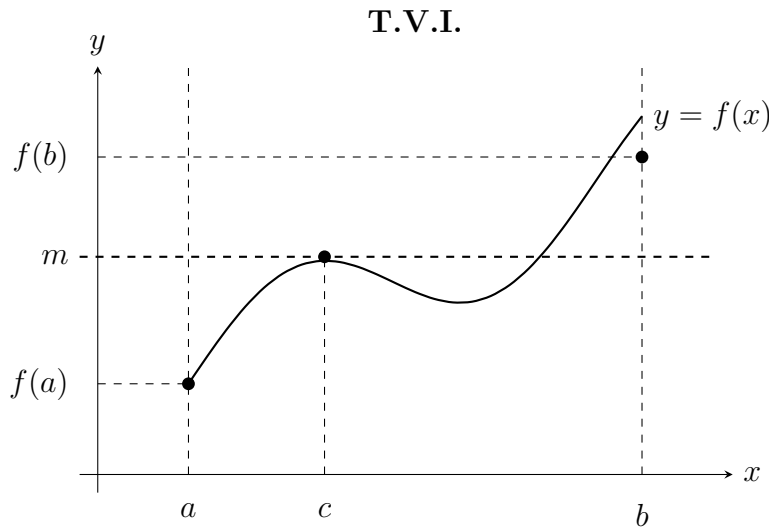
Les fonctions continues, définies sur des intervalles, ont des propriétés importantes remarquables.

THÉORÈME 3.10 (Théorème des valeurs intermédiaires).

Soient $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\forall m \in]\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))[, \quad \exists c \in]a, b[: f(c) = m.$$

Formulé d'une autre manière, le t.v.i. affirme que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.



PREUVE DU T.V.I.

Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $f(a) < m < f(b)$.
 On veut montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = m$.

Posons

$$E = \{x \in [a, b] : f(x) \leq m\}.$$

$E \subset [a, b]$, il est donc borné et comme $f(a) < m$, E contient a .

En posant $c = \sup E$, on a $a \leq c \leq b$. On veut montrer que $f(c) = m$.

Par définition du sup, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in E$ tel que $c - \frac{1}{n} < x_n \leq c$.

Par le théorème des gendarmes, $x_n \rightarrow c$ et par continuité de f au point c , $f(x_n) \rightarrow f(c)$.

De plus, comme $(x_n) \subset E$, $\forall n, f(x_n) \leq m$, ce qui implique, par passage à la limite, que $f(c) \leq m$.

Montrons maintenant l'inégalité inverse : $f(c) \geq m$.

Comme $f(c) \leq m < f(b)$, on peut noter que $c \neq b$, donc $a \leq c < b$.

Pour tout entier $n > \frac{1}{b-c}$, on a $\frac{1}{n} < b - c$ donc $a < c + \frac{1}{n} < b$.

De plus, $\sup E = c < c + \frac{1}{n}$, donc $c + \frac{1}{n} \notin E$. Ceci implique que $f(c + \frac{1}{n}) > m$. En faisant tendre n vers $+\infty$ et en utilisant la continuité de f au point c , on obtient $f(c) \geq m$.

Finalement, on a bien $f(c) = m$. Remarquons enfin que $c \neq a$ car $f(a) < m = f(c)$. □

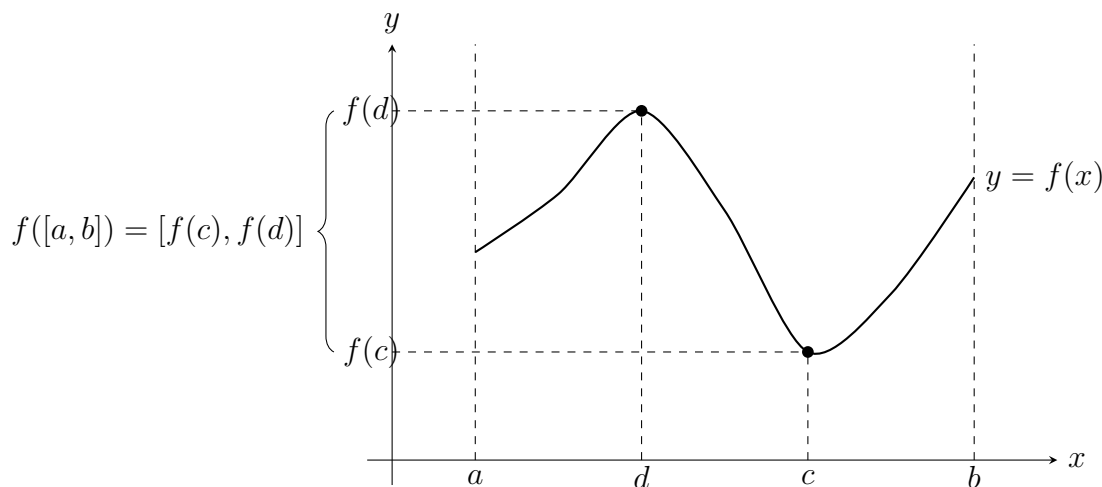
THÉORÈME 3.11 (Théorème des bornes atteintes). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes. C'est-à-dire qu'il existe $c \in [a, b]$ et $d \in [a, b]$ tels que*

$$f(c) = \min f([a, b]), \quad f(d) = \max f([a, b]).$$

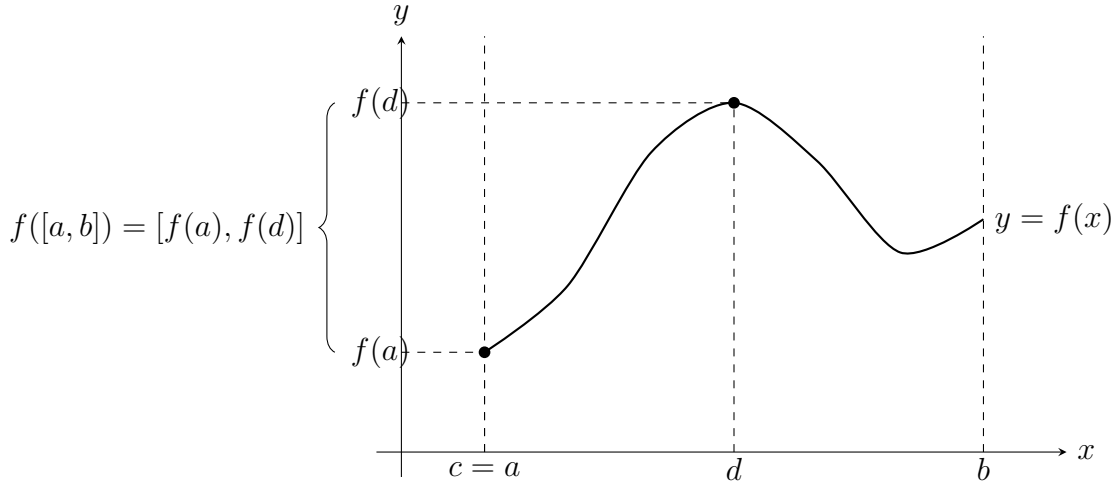
De plus, $f([a, b]) = [f(c), f(d)]$.

Autrement dit, l'image continue d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.

Exemple où les bornes sont à l'intérieur de l'intervalle



Exemple où l'une des bornes est au bord de l'intervalle.



PREUVE.

Montrons d'abord que $f([a, b])$ est majoré.

Supposons par l'absurde que $f([a, b])$ n'est pas majoré. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) > n$.

Comme la suite (x_n) est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ convergente. Notons $x = \lim x_{\phi(n)}$ et remarquons que, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leq x_{\phi(n)} \leq b$, par passage à la limite, on a $a \leq x \leq b$.

D'une part, par continuité de f au point x , on a $f(x_{\phi(n)}) \rightarrow f(x)$. D'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_{\phi(n)}) > \phi(n) \geq n \implies f(x_{\phi(n)}) \rightarrow +\infty.$$

D'où la contradiction. On conclut que $f([a, b])$ est majoré.

Posons maintenant $S = \sup f([a, b])$. Par définition du sup,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists d_n \in [a, b] : S - \frac{1}{n} \leq f(d_n) \leq S,$$

et par le théorème des gendarmes, $f(d_n) \rightarrow S$. La suite (d_n) étant bornée, elle admet une sous-suite $(d_{\psi(n)})$ convergente. Notons $d = \lim d_{\psi(n)}$ et remarquons que $d \in [a, b]$. Comme f est continue au point d , on a $f(d_{\psi(n)}) \rightarrow f(d)$ et par unicité de la limite, on obtient $S = f(d)$.

En appliquant ce qui précède à la fonction $-f$ qui est continue sur $[a, b]$, on obtient que $-f([a, b])$ est majoré et qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $-f(c) = \sup(-f([a, b]))$. On en déduit que $f([a, b])$ est minoré et $f(c) = \min f([a, b])$.

D'après le t.v.i., $f([a, b])$ est un intervalle. Il est donc de la forme $f([a, b]) = [f(c), f(d)]$. □

THÉORÈME 3.12. Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow J$ une fonction strictement monotone et surjective. Alors son inverse f^{-1} est continue.

PREUVE. Supposons que J est un intervalle ouvert, pour simplifier. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que f est strictement croissante. Alors f^{-1} est également strictement croissante.

Fixons $b \in J$ et montrons que f^{-1} est continue en b . Posons $a = f^{-1}(b)$, c'est-à-dire $b = f(a)$. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset I$. Posons

$$\delta = \min(f(a + \varepsilon) - b, b - f(a - \varepsilon))$$

et remarquons que, par croissance stricte de f , on a $\delta > 0$.

Pour tout $y \in J$ avec $|y - b| < \delta$, on a

$$f(a - \varepsilon) \leq b - \delta < y < b + \delta \leq f(a + \varepsilon),$$

et par croissance stricte de f^{-1} , on en déduit que

$$a - \varepsilon < f^{-1}(y) < a + \varepsilon$$

et donc

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| = |f^{-1}(y) - a| < \varepsilon.$$

□

REMARQUE 3.13. Remarquons que les hypothèses de ce théorème n'impliquent pas la continuité de f .

Par exemple, prenons $I = [0, 2]$, $J = [0, 1] \cup]2, 3]$ et définissons la fonction $f : I \rightarrow J$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1], \\ x + 1 & \text{si } x \in]1, 2]. \end{cases}$$

f est bien surjective puisque pour tout $y \in [0, 1]$, $y = f(y)$ et pour tout $y \in]2, 3]$, $y = f(y - 1)$. De plus, elle est strictement croissante. Mais elle n'est pas continue (au point 1).

L'obstruction vient du fait que J n'est pas un intervalle. Si on ajoute l'hypothèse que J est un intervalle, on a le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.14. *Soient I et J deux intervalles, et $f : I \rightarrow J$ une fonction strictement monotone et surjective. Alors f et f^{-1} sont continues.*

PREUVE.

Comme f est strictement monotone et surjective, $f^{-1} : J \rightarrow I$ est également strictement monotone et surjective. En appliquant la proposition à f^{-1} , on peut déduire que f est continue. □

4. Continuité uniforme

Rappelons une caractérisation de la continuité d'une fonction : $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, si

$$\forall a \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in D \quad \text{et} \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Les exemples plus simples sont les fonctions lipschitziennes, où il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\forall x \in D, \forall y \in D, \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

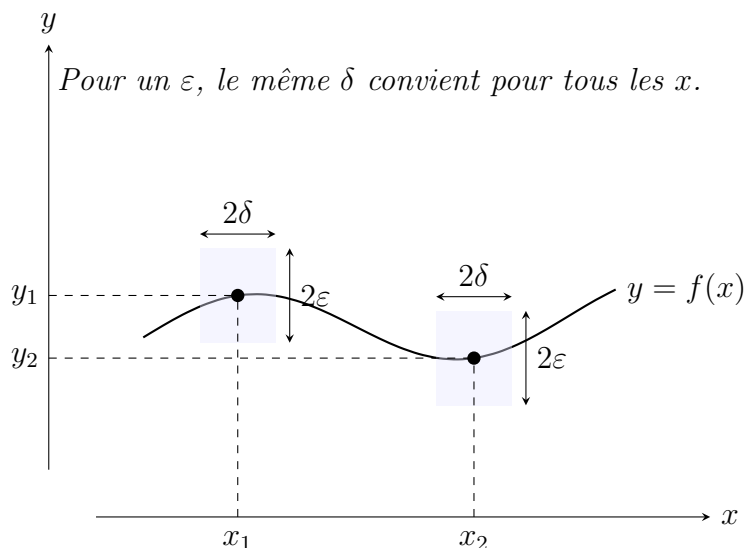
En effet, alors f est continue, parce que le choix $\delta := \varepsilon/L$ convient à chaque point $a \in D$:

$$x \in D \quad \text{et} \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq L \cdot |x - a| < L\delta = \varepsilon.$$

Il existe un cas intermédiaire entre les deux notions qui jouera un rôle important lors de l'étude de l'intégrale au second semestre :

DÉFINITION. Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est *uniformément continue*, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_1 \in D, \forall x_2 \in D : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$



THÉORÈME 4.15 (Théorème de Heine). Soient $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue.

PREUVE. Raisonnons par contraposée. Supposons que f n'est pas uniformément continue. Alors il existe ε_0 pour lequel on ne peut pas choisir un δ convenable. En appliquant cette observation avec $\delta = \frac{1}{n}$ pour chaque $N \in \mathbb{N}^*$, il existe deux points $x_n, y_n \in [a, b]$ tels que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \quad \text{mais} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

D'après le Théorème de Bolzano–Weierstrass (x_n) admet une sous-suite convergente :

$$x_{\phi(n)} \rightarrow c \in [a, b].$$

Alors on a aussi $y_{\phi(n)} \rightarrow c \in [a, b]$, parce que

$$|y_{\phi(n)} - c| \leq |y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}| + |x_{\phi(n)} - c| \leq \frac{1}{\phi(n)} + |x_{\phi(n)} - c| \rightarrow 0.$$

Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi

$$|f(x_{\phi(n)}) - f(y_{\phi(n)})| \geq \varepsilon_0$$

donc les suites $(f(x_{\phi(n)}))$ et $(f(y_{\phi(n)}))$ ne peuvent pas converger vers la même limite. On a donc deux suites qui convergent vers c mais les suites de leurs images par f ne convergent

pas vers la même limite. Autrement dit, f n'a pas de limite en c . En particulier, f n'est pas continue en c . \square

REMARQUE 4.16. Pour $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, on a les implications

$$f \text{ lipschitzienne} \implies f \text{ uniformément continue} \implies f \text{ continue.}$$

Les implications inverses sont fausses en général. Par exemple, définissons $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x}$. On a vu que f est continue et par le théorème de Heine, elle est uniformément continue. Mais on a vu aussi que f n'est pas lipschitzienne.

Définissons maintenant $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. f est continue, mais elle n'est pas uniformément continue. En effet, choisissons $\varepsilon = 1$ et montrons que pour tout $\delta > 0$, il existe $x \in]0, 1]$ et $y \in]0, 1]$ tels que $|x - y| < \delta$ et $|f(x) - f(y)| \geq 1$.

Soit $\delta > 0$, posons $y = \min(\delta, \frac{1}{4})$ et $x = y + \frac{\delta}{2}$. On a

$$|x - y| = x - y = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

De plus, $2xy = y(2y + \delta) \leq \frac{1}{4}(2\delta + \delta) = \frac{3}{4}\delta < \delta$. Donc

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{x - y}{xy} \right| = \frac{\delta}{2xy} > 1.$$

5. Dérivabilité en un point

DÉFINITION. Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est *dérivable* en un point $a \in D$ si la limite suivante existe :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Le nombre $f'(a)$ défini par

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

est alors appelé dérivée de f au point a .

PROPOSITION 5.17. *Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in D$. Si f est dérivable en a , alors elle est continue en a .*

PREUVE. La dérivabilité de f en a donne :

$$f(x) = f(a) + (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a) + 0 \times f'(a) = f(a).$$

\square

REMARQUE 5.18. La réciproque n'est pas vraie. Par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0, mais pas dérivable en 0. On a vu que la fonction valeur absolue est 1-lipschitzienne, donc continue sur \mathbb{R}^* . Mais elle n'est pas dérivable en 0, parce que les limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

sont différentes ;

EXEMPLES 5.19.

- (i) Les fonctions constantes $f(x) = \lambda$ sont dérivables en tout point $a \in \mathbb{R}$, et $f'(a) = 0$.
- (ii) Les fonctions affines $f(x) = \lambda x + \beta$ sont dérivables en tout point $a \in \mathbb{R}$, et $f'(a) = \lambda$.
- (iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f(x) = x^n$ est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$, et $f'(a) = na^{n-1}$.
- (iv) \exp est dérivable en 0 et $\exp'(0) = 1$.
- (v) \sin est dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$.
- (vi) \cos est dérivable en 0 et $\cos'(0) = 0$.
- (vii) La racine carrée est dérivable en a si $a > 0$. De plus la dérivée en a est égale à $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.
- (viii) La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

PREUVE. (i)

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\lambda - \lambda}{h} = \frac{0}{h} = 0.$$

Donc $f'(a) = 0$.

(ii)

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\lambda(a+h) + \beta - \lambda a + \beta}{h} = \frac{\lambda h}{h} = \lambda.$$

Donc $f'(a) = \lambda$.

(iii) Rappelons la formule du binôme de Newton :

$$(a+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} h^k = a^n + na^{n-1}h + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} a^{n-k} h^k.$$

Donc

$$\frac{(a+h)^n - a^n}{h} = na^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} a^{n-k} h^{k-1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} na^{n-1}.$$

(iv) Rappelons les inégalités pour tout $h < 1$,

$$1+h \leq e^h \leq \frac{1}{1-h} \implies h \leq e^h - 1 \leq \frac{1}{1-h} - 1 = \frac{h}{1-h}.$$

Donc pour $0 < h < 1$,

$$1 \leq \frac{e^h - 1}{h} \leq \frac{\frac{1}{1-h} - 1}{h} = \frac{1}{1-h}.$$

Le principe des gendarmes implique $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Pour $-1 < h < 0$,

$$1 \geq \frac{e^h - 1}{h} \geq \frac{1}{1-h}.$$

Le principe des gendarmes implique $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

(v) Rappelons que

$$\frac{\sin h - \sin 0}{h} = \frac{\sin h}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1.$$

(vi)

$$\frac{\cos h - \cos 0}{h} = -h \frac{1 - \cos h}{h^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -0 \times \frac{1}{2} = 0.$$

(vii)

$$\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

□

PROPOSITION 5.20.

(i) Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in D$. Si f et g sont dérivables en a , alors $\lambda f + g$, et fg sont aussi dérivables en a . De plus,

$$(\lambda f + g)'(a) = (\lambda f'(a) + g'(a)),$$

$$(fg)'(a) = (f'(a)g(a) + f(a)g'(a)).$$

(ii) Si f est dérivable en a et $f(a) \neq 0$, alors $1/f$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}.$$

(iii) Si f et g sont dérivables en a , et $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est aussi dérivable en a , et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

PREUVE. On applique les règles de manipulation des limites :

(i)

$$\frac{(\lambda f + g)(a+h) - (\lambda f + g)(a)}{h} = \lambda \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \lambda f'(a) + g'(a).$$

(ii)

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(a+h) - (fg)(a)}{h} &= \frac{(f(a+h) - f(a))g(a+h) + f(a)(g(a+h) - g(a))}{h} \\ &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} g(a+h) + f(a) \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \end{aligned}$$

(iii) Si $f'(a) \neq 0$, on a

$$\frac{\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)}}{h} = \frac{f(a) - f(a+h)}{h f(a+h)f(a)} = -\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \frac{1}{f(a+h)f(a)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\frac{f'(a)}{f^2(a)}.$$

(iv) Si $f'(a) \neq 0$, on a, en appliquant (ii) puis (iii),

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = g'(a) \frac{1}{f(a)} + g(a) \left(\frac{1}{f}\right)'(a) = g'(a) \frac{1}{f(a)} - g(a) \frac{f'(a)}{f(a)^2} = \frac{g'(a)f(a) - g(a)f'(a)}{f^2(a)}.$$

□

Il peut être utile d'utiliser une définition équivalente de la dérivation au point a

PROPOSITION 5.21. *Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in D$.
 f est dérivable au point a si et seulement si pour tout $h \in \mathbb{R}$ avec $a + h \in D$, on a*

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

PREUVE. Il suffit de poser

$$\varepsilon(h) = \frac{f(a + h) - f(a) - f'(a)h}{h} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - f'(a).$$

□

DÉFINITION (Tangente). Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point $a \in D$. Alors la tangente à la courbe de f au point a est la droite d'équation

$$y = f'(x)(x - a) + f(a).$$

PROPOSITION 5.22.

*Soit $f : D \rightarrow E$ et $g : E \rightarrow F$ deux fonctions et $a \in D$.
 Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en a , et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

PREUVE. On a

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon_1(h) = f(a) + H$$

en posant $H = f'(a)h + h\varepsilon_1(h) = h(f'(a) + \varepsilon_1(h))$.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a + h) &= g(f(a + h)) = g(f(a) + H) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))H + H\varepsilon_2(H) \quad (\text{avec } \varepsilon_2(H) \xrightarrow{H \rightarrow 0} 0) \\ &= (g \circ f)(a) + g'(f(a))(f'(a)h + h\varepsilon_1(h)) + H\varepsilon_2(H) \\ &= (g \circ f)(a) + g'(f(a))f'(a)h + g'(f(a))h\varepsilon_1(h) + h(f'(a) + \varepsilon_1(h))\varepsilon_2(H) \\ &= (g \circ f)(a) + g'(f(a))f'(a)h + h\varepsilon(h) \end{aligned}$$

en posant

$$\varepsilon(h) = g'(f(a))\varepsilon_1(h) + (f'(a) + \varepsilon_1(h))\varepsilon_2(H) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

et en remarquant que quand $h \rightarrow 0$, $H \rightarrow 0$ donc $\varepsilon_2(H) \rightarrow 0$. □

L'utilisation de la dérivée simplifie le calcul de nombreuses limites :

PROPOSITION 5.23 (Règle de l'Hôpital). *Soient deux fonctions $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in D$.
 Si f et g sont dérivables en a et $g'(a) \neq 0$, alors*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

PREUVE. Si $x \rightarrow a$, alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \rightarrow \frac{f'(a)}{g'(a)}. \quad \square$$

6. Dérivabilité sur un ensemble

DÉFINITION. On dit que $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est *dérivable* (sur D), si elle est dérivable en tout $x \in D$. La fonction

$$\begin{aligned} f' &: D \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

est alors appelée dérivée de f .

PROPOSITION 6.24.

- (i) Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables, alors $\lambda f + g$, et fg sont aussi dérivables. De plus,

$$\begin{aligned} (\lambda f + g)' &= \lambda f' + g', \\ (fg)' &= f'g + fg'. \end{aligned}$$

- (ii) Si f est dérivable, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur $D \setminus f^{-1}(\{0\})$ et

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

- (iii) Si f et g sont dérivables, alors $\frac{g}{f}$ est dérivable sur $D \setminus f^{-1}(\{0\})$ et

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}.$$

PROPOSITION 6.25.

Soit $f : D \rightarrow E$ et $g : E \rightarrow F$ deux fonctions.

- (i) Si f et g sont dérivables, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable et

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)f'.$$

PROPOSITION 6.26. La fonction exponentielle est dérivable et $\exp' = \exp$.

PREUVE. En utilisant la propriété multiplicative de la fonction exponentielle, la dérivabilité de \exp s'obtient en tout $a \in \mathbb{R}$ comme suit :

$$\frac{e^{a+h} - e^a}{h} = e^a \cdot \frac{e^h - 1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} e^a = \exp a. \quad \square$$

PROPOSITION 6.27.

- (i) La fonction \sin est dérivable sur \mathbb{R} et $\sin' = \cos$.
(ii) La fonction \cos est dérivable sur \mathbb{R} et $\cos' = -\sin$.

PREUVE.

(i) En utilisant l'identité

$$\sin(a+h) - \sin a = 2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{2a+h}{2}\right),$$

on a

$$\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cos\left(\frac{2a+h}{2}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos a.$$

(ii) Notons f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$ et rappelons que

$$\cos = \sin \circ f \quad \text{et} \quad \sin = \cos \circ f.$$

De plus, f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc d'après Proposition 6.25 et (i), \cos est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\cos' = (\sin' \circ f) f' = -(\cos \circ f) = -\sin.$$

□

EXEMPLES 6.28.

(i) Tout polynôme est dérivable et sa dérivée est un polynôme :

$$\text{si } p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \quad \text{alors } p'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + a_1.$$

(ii) Toute fraction rationnelle $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus g^{-1}(0)$ et sa dérivée est la fraction rationnelle $\frac{f'g - g'f}{g^2}$.

(iii) La fonction tangente est dérivable, et

$$\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2.$$

En effet,

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin' \cdot \cos - \sin \cdot \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$$

7. Fonctions dérivables sur des intervalles

PROPOSITION 7.29. *Soit I un intervalle, et $f : I \rightarrow J$ une fonction strictement monotone et surjective.*

Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors son inverse f^{-1} est dérivable en $f(a)$, et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Voir Figure 1 : les tangentes aux graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la ligne droite d'équation $y = x$.

PREUVE. D'après Proposition 3.12, la fonction f^{-1} est continue sur J . Posons $b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$. Par continuité de f^{-1} en b et par dérivabilité de f en a , en posant $x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$, on obtient

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

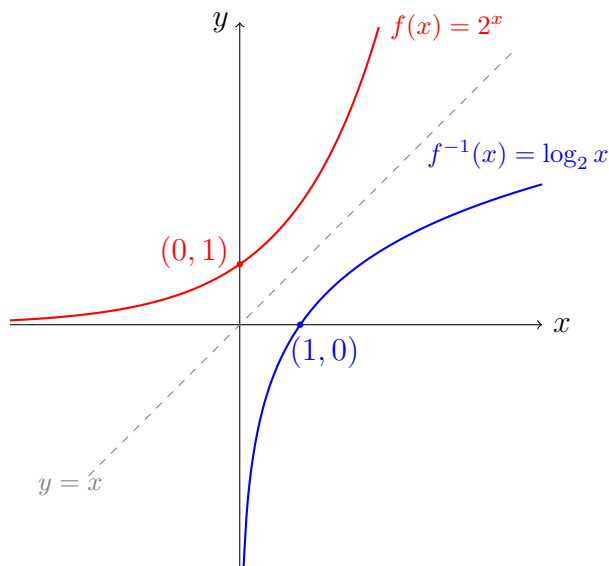


FIGURE 1. Le graphe d'une fonction inverse

Comme $f'(a) \neq 0$, on en déduit que

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

EXEMPLES 7.30.

- (i) La fonction $x \rightarrow e^x$ est strictement croissante et surjective de \mathbb{R} dans $]0, +\infty[$, dérivable et sa dérivée ne s'annule pas. Donc sa fonction réciproque \ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\ln' x = \frac{1}{x} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

En effet, pour tout $x > 0$, en posant $a = \ln x$, on a $x = e^a$.

$$\ln' x = \ln'(e^a) = (\exp^{-1})'(\exp(a)) = \frac{1}{\exp'(a)} = \frac{1}{\exp(a)} = \frac{1}{x}.$$

- (ii) Pour $p \in \mathbb{R}$ fixé quelconque, la fonction $x \mapsto x^p$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$(x^p)' = px^{p-1} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

En effet,

$$x^p = \exp(p \ln x) = \exp(g(x)) \quad \text{avec } g(x) := p \ln x,$$

d'où

$$(x^p)' = \exp'(g(x))g'(x) = \exp(g(x)) \times \frac{p}{x} = x^p \times \frac{p}{x} = px^{p-1}.$$

- (iii) La fonction $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ (la restriction du \sin sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est strictement croissante et surjective sur $[-1, 1]$). Elle admet donc une fonction inverse notée $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

La fonction arcsin est dérivable sur $] - 1, 1[$ et

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

En effet, pour tout $x \in] - 1, 1[$, $x = \sin a$ avec $a \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. De plus, $\sin'(a) = \cos a > 0$. Donc arcsin est dérivable en x et

$$\arcsin' x = \arcsin'(\sin a) = \frac{1}{(\sin)'(a)} = \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(a)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- (iv) La fonction $\cos|_{[0,\pi]}$ (la restriction du cos sur $[0, \pi]$) est strictement décroissante et surjective sur $[-1, 1]$. Elle admet donc une fonction inverse notée arccos : $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.

La fonction arccos est dérivable sur $] - 1, 1[$ et

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

En effet, pour tout $x \in] - 1, 1[$, $x = \cos a$ avec $a \in]0, \pi[$. De plus, $\cos'(a) = -\sin a < 0$. Donc arccos est dérivable en x et

$$\arccos' x = \arccos'(\cos a) = \frac{1}{\cos'(a)} = \frac{-1}{\sin a} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(a)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- (v) La fonction $\tan|_{] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ (la restriction de tan sur $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$) est strictement croissante et surjective sur \mathbb{R} . Elle admet donc une fonction inverse notée arctan : $\mathbb{R} \rightarrow] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

La fonction arctan est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x = \tan a$ avec $a \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. $\tan'(a) = 1 + \tan^2(a) > 0$. Donc arctan est dérivable en x et

$$\arctan'(x) = \arctan'(\tan a) = \frac{1}{\tan'(a)} = \frac{1}{1+\tan^2(a)} = \frac{1}{1+x^2}$$

L'étude de la dérivée souvent permet de déterminer les maximums et les minimums de fonctions :

DÉFINITION. Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ admet en $a \in D$ un

- *maximum global*, si $f(a) \geq f(x)$ pour tout $x \in D$;
- *maximum global strict*, si $f(a) > f(x)$ pour tout $x \in D \setminus \{a\}$;
- *maximum local*, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset D$ et

$$\forall x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[, \quad f(a) \geq f(x).$$

- *maximum local strict*, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset D$ et

$$\forall x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[, \quad x \neq a, \quad f(a) > f(x).$$

- *minimum global*, si $f(a) \leq f(x)$ pour tout $x \in D$;
- *minimum global strict*, si $f(a) < f(x)$ pour tout $x \in D \setminus \{a\}$;
- *minimum local*, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset D$ et

$$\forall x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[, \quad f(a) \leq f(x).$$

- *minimum local strict*, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset D$ et

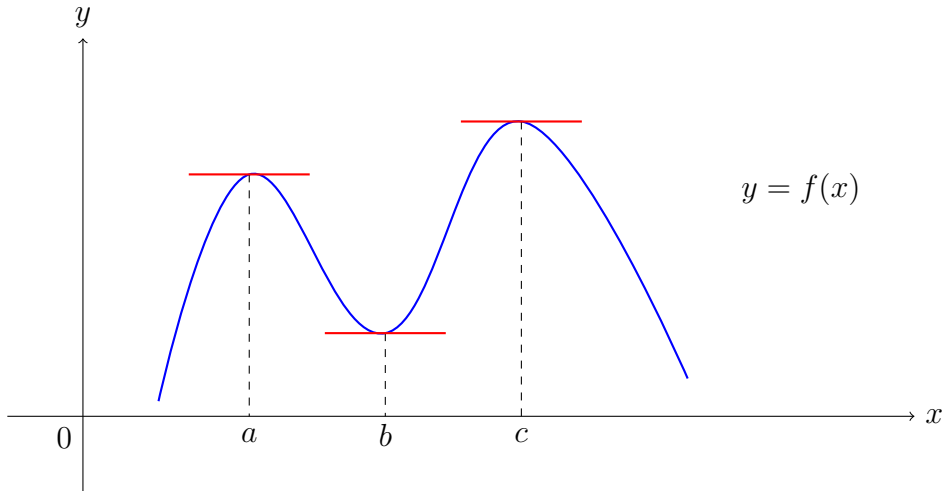
$$\forall x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[, x \neq a, f(a) < f(x).$$

- *extremum global (strict)* si elle admet en a un maximum global (strict) ou un minimum global (strict)
- *extremum local (strict)* si elle admet en a un maximum local ou un minimum local (strict)

REMARQUE 7.31. f admet un maximum (global strict, local) en $a \iff -f$ admet un minimum (global strict, local) en a .

THÉORÈME 7.32 (Fermat). Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in D$. Si f est dérivable en a et admet un *extremum local* en a , alors $f'(a) = 0$.

Aux extrema locaux où f est dérivable, la tangente est horizontale.



PREUVE. Supposons que f admet un minimum local en a , et fixons $\varepsilon > 0$ assez petit pour que f soit définie sur $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ et pour que pour tout $h \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, on ait $f(a + h) \geq f(a)$. Alors

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \leq 0 \quad \text{et} \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \geq 0.$$

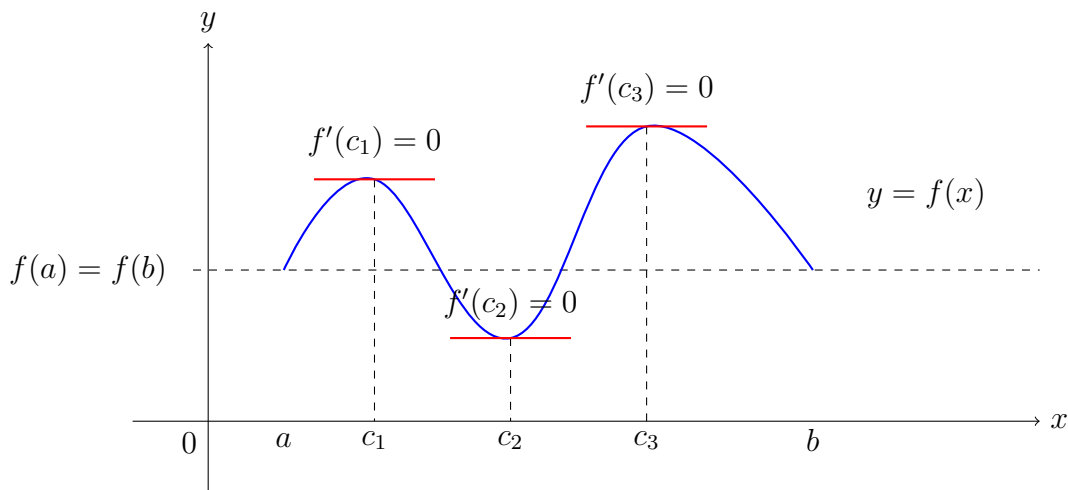
On en déduit que $f'(a) = 0$. □

THÉORÈME 7.33 (Rolle).

Soient deux nombres réels $a < b$ et une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que

- f est continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$.

Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



PREUVE. Comme f est continue sur $[a, b]$, d'après le théorème des bornes atteintes (Théorème 3.11), il existe $c_1, c_2 \in [a, b]$ tels que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2).$$

Autrement dit, f admet un minimum global en c_1 et un maximum global en c_2 .

Si $f(c_1) = f(c_2)$, alors f est constante sur $[a, b]$ et $f'(c) = 0$ pour tout $c \in]a, b[$.

Si $f(c_1) \neq f(c_2)$, alors $c_1 \in]a, b[$ ou $c_2 \in]a, b[$. Donc f admet un extremum local en l'un des deux points c_1 ou c_2 . D'après Théorème 7.32, on a $f'(c_1) = 0$ ou $f'(c_2) = 0$. \square

EXEMPLE 7.34. Soit p un polynôme de degré $n \geq 2$. Si p admet n racines réelles distinctes : $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, alors sa dérivée p' admet $n - 1$ racines réelles distinctes : $y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1}$, et elles séparent les racines de p :

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n.$$

En effet, chacun des intervalles ouverts disjoints $]x_k, x_{k+1}[$ contient au moins une racine de p' par le théorème de Rolle. Comme p' a au plus $\deg p' = n - 1$ racines, aucun de ces intervalles ne contient plus d'une racine, et p' n'a pas d'autres racines.

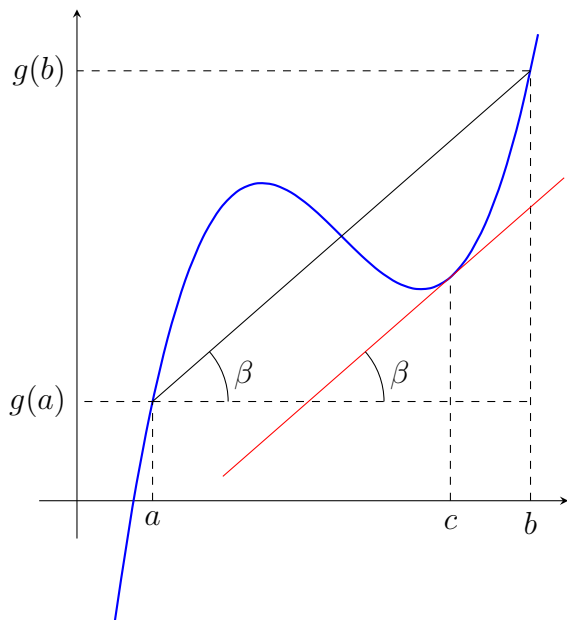
La généralisation suivante du théorème de Rolle s'appelle aussi le "théorème des accroissements finis".

THÉORÈME 7.35 (Théorème des accroissements finis). *Soient deux nombres réels $a < b$ et une fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que*

- g est continue sur $[a, b]$
- g est dérivable sur $]a, b[$

Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$.

le graphe de g admet en c une tangente parallèle à la droite passant par les extrémités $(a, g(a))$ et $(b, g(b))$ du graphe.



PREUVE. Pour tout $x \in [a, b]$, posons

$$f(x) = g(x) - \frac{g(b) - g(a)}{b - a}(x - a).$$

La fonction f est continue sur $[a, b]$ comme somme de fonctions continues et dérivable sur $]a, b[$ comme somme de fonctions dérivables. Elle vérifie $f(a) = f(b)$. En effet,

$$f(a) = g(a) - \frac{g(b) - g(a)}{b - a}(a - a) = g(a),$$

$$f(b) = g(b) - \frac{g(b) - g(a)}{b - a}(b - a) = g(b) - (g(b) - g(a)) = g(a).$$

De plus,

$$\forall x \in]a, b[, \quad f'(x) = g'(x) - \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Le théorème de Rolle appliqué à la fonction f donne l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$ et

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow g'(c) - \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 0 \Leftrightarrow g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

□

Le t.a.f. nous permet d'étudier la monotonie des fonctions :

PROPOSITION 7.36. *Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.*

- (i) f est croissante $\Leftrightarrow f' \geq 0$ sur I .
- (ii) f est décroissante $\Leftrightarrow f' \leq 0$ sur I .
- (iii) f est constante $\Leftrightarrow f' = 0$ sur I .
- (iv) $f' > 0$ sur $I \Rightarrow f$ est strictement croissante.

(v) $f' < 0$ sur $I \Rightarrow f$ est strictement décroissante.

PREUVE.

(i) Supposons que f est croissante et fixons $a \in I$. Alors pour tout $x \neq a$, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$, donc

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

Réciproquement, supposons que $f' \geq 0$ sur I .

Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. D'après le t.a.f (Théorème 7.35), il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Comme $f'(c) \geq 0$ et $b - a > 0$, on en déduit que

$$f(b) - f(a) \geq 0.$$

(ii) On applique (i) à la fonction $-f$:

$$f \text{ est décroissante} \Leftrightarrow -f \text{ est décroissante} \Leftrightarrow (-f') \geq 0 \text{ sur } I \Leftrightarrow f' \leq 0 \text{ sur } I.$$

(iii)

$$f \text{ est constante} \Leftrightarrow f \text{ est croissante et décroissante} \Leftrightarrow 0 \leq f' \leq 0 \text{ sur } I \Leftrightarrow f' = 0 \text{ sur } I.$$

(iv) Supposons que $f' \geq 0$ sur I .

Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. D'après le t.a.f (Théorème 7.35), il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Comme $f'(c) > 0$ et $b - a > 0$, on en déduit que $f(b) - f(a) > 0$.

(v) On applique (iv) à $-f$.

$f' < 0$ sur $I \Leftrightarrow -f' > 0$ sur $I \Rightarrow -f$ est strictement croissante $\Leftrightarrow f$ est strictement décroissante.

□

REMARQUE 7.37.

(1) (iv) et (v) sont des implications strictes. Les réciproques ne sont pas vraies en général.

(2) Si on ne suppose pas que I est un intervalle, alors aucune des assertions (i) à (iv) n'est vraie.

Pouvez-vous trouver des contre-exemples ?

COROLLAIRE 7.38. Soit I un intervalle, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $L \geq 0$. Alors

$$g \text{ est } L\text{-lipschitzienne} \iff g' \text{ est bornée par } L.$$

PREUVE. Supposons g' bornée par L . Soient $a, b \in I$. D'après le t.a.f. (Théorème 7.35), il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$|g(b) - g(a)| = |g'(c)| |b - a| \leq L |b - a|$$

Réciproquement, supposons g L -lipschitzienne. Fixons $a \in I$. Pour tout $x \in I$ avec $x \neq a$,

$$|g(x) - g(a)| \leq L |x - a|,$$

donc

$$-L \leq \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \leq L.$$

Par passage à la limite quand x tend vers a , on obtient

$$-L \leq \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \leq L$$

c'est-à-dire $|g'(a)| \leq L$. □

8. Classes de différentiabilité

Définissons les dérivées n -ième par récurrence comme suit :

DÉFINITION (Dérivées d'ordre supérieur).

On considère une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- On note $f^{(0)} = f$.
- Si f est dérivable, on note $f^{(1)} = f'$.
- Si f' est dérivable, on dit que f est 2 fois dérivable et on appelle dérivée seconde la fonction $f'' = (f')'$. On note $f^{(2)} = f'' = (f^{(1)})'$.
- Si f'' est dérivable, on dit que f est 3 fois dérivable et appelle dérivée troisième la fonction $f^{(3)} = (f'')' = (f^{(2)})'$.
- Plus généralement, soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est n fois dérivable si $f^{(k)}$ est dérivable pour $k = 1, \dots, n - 1$. On note $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

DÉFINITION (Classe \mathcal{C}^n).

- Une fonction est dite de classe \mathcal{C}^0 si elle est continue.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de classe \mathcal{C}^n si f est n -fois dérivable et sa dérivée n -ième $f^{(n)}$ est continue.
- On dit qu'une fonction est de classe \mathcal{C}^∞ si elle est de classe \mathcal{C}^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9. Fonctions convexes

DÉFINITION. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I .

- f est *convexe* si $\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, \forall t \in [0, 1]$,

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

- f est *strictement convexe* si $\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, \forall t \in]0, 1[$,

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

- f est *concave* si $\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, \forall t \in [0, 1]$,

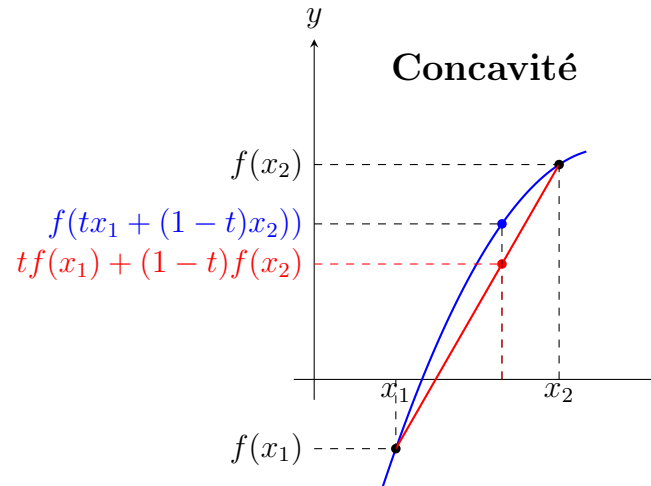
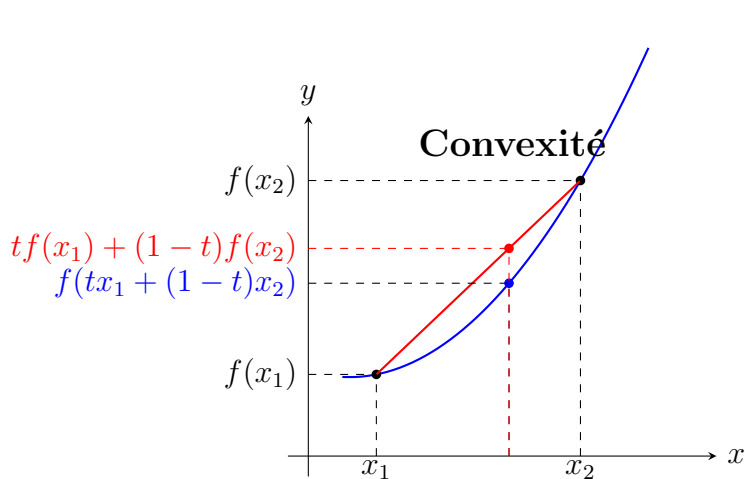
$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

- f est *strictement concave* si $\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, \forall t \in]0, 1[$,

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) > tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

REMARQUE 9.39.

- f est convexe si et seulement si $-f$ est concave.
- f est strictement convexe si et seulement si $-f$ est strictement concave.



EXEMPLES 9.40.

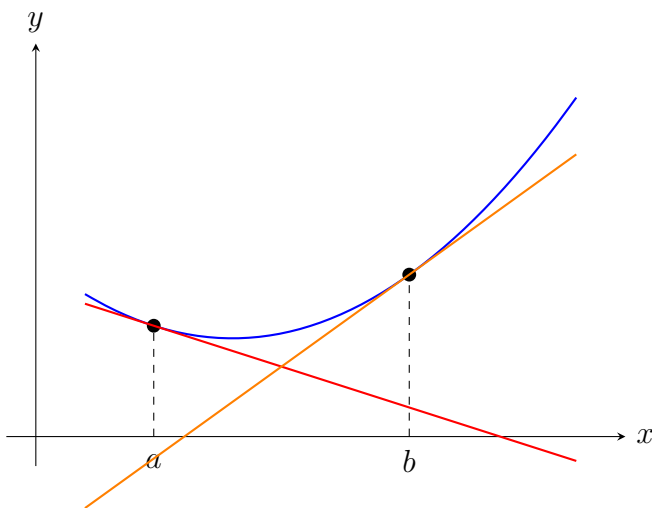
- (1) Les fonctions constantes sont à la fois convexes et concaves.
- (2) Les fonctions affines $f(x) = ax + b$ sont à la fois convexes et concaves.
- (3) La fonction *valeur absolue* $x \mapsto |x|$ est convexe.
- (4) La fonction exponentielle est convexe. En effet, si $0 \leq t \leq 1$ et $tx + (1 - t)y = z$, alors

$$\begin{aligned}
 t \exp(x) + (1 - t) \exp(y) &= \exp(z) (t \exp(x - z) + (1 - t) \exp(y - z)) \\
 &\geq \exp(z) (1 + t(x - z) + (1 - t)(y - z)) = \exp(z).
 \end{aligned}$$

Il existe deux caractérisations utiles des fonctions convexes *dérivables* :

PROPOSITION 9.41. *Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes*

- (1) f est convexe
- (2) $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ pour tous $x, a \in I$
- (3) $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante



REMARQUE 9.42.

- La propriété (2) signifie que le **graphe** de f est au dessus de sa **tangente** en tout point.
- La propriété (3) signifie que la pente de la **tangente** augmente avec x .

PREUVE.

(1) \implies (2)

Soient $a \in I$, $x \in I$ et $t \in [0, 1]$. L'inégalité est triviale si $x = a$. Supposons que $x \neq a$ et utilisons la définition de la convexité.

$$\begin{aligned} f(a + t(x - a)) &= f(tx + (1 - t)a) \leq tf(x) + (1 - t)f(a) \implies f(a + t(x - a)) - f(a) \leq t(f(x) - f(a)) \\ &\implies \frac{f(a + t(x - a)) - f(a)}{t(x - a)}(x - a) \leq f(x) - f(a) \end{aligned}$$

Et en faisant tendre t vers 0, on obtient

$$f'(a)(x - a) \leq f(x) - f(a) \iff f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a).$$

(2) \implies (3)

Soient $a \in I$ et $b \in I$. D'après (2), on a

$$f(b) \geq f(a) + f'(a)(b - a)$$

mais aussi, en échangeant les rôles de a et b ,

$$f(a) \geq f(b) + f'(b)(a - b).$$

Par transitivité, on a alors

$$f(b) \geq f(b) + f'(b)(a - b) + f'(a)(b - a) = f(b) + (f'(b) - f'(a))(a - b).$$

D'où

$$(f'(b) - f'(a))(b - a) \geq 0.$$

On en déduit que f' est croissante.

(3) \implies (1)

Soient $x \in I$, $y \in I$ et $t \in [0, 1]$.

On veut montrer que $f(ty + (1 - t)x) \leq tf(y) + (1 - t)f(x)$.

Si $x = y$, l'inégalité est triviale.

On peut alors supposer que $x < y$, quitte à échanger les rôles de x et y .

Remarquons que $x < ty + (1 - t)x < y$.

D'après le t.a.f. il existe $a \in]x, ty + (1 - t)x[$ et $b \in]ty + (1 - t)x, y[$ tels que

$$\frac{f(ty + (1 - t)x) - f(x)}{t(y - x)} = f'(a), \quad \frac{f(y) - f(ty + (1 - t)x)}{(1 - t)(y - x)} = f'(b).$$

Comme $a < ty + (1-t)x < b$ et f' est croissante, on a $f'(a) \leq f'(b)$. De plus $y - x > 0$, donc

$$\begin{aligned} \frac{f(ty + (1-t)x) - f(x)}{t(y-x)} &\leq \frac{f(y) - f(ty + (1-t)x)}{(1-t)(y-x)} \\ \iff \frac{f(ty + (1-t)x) - f(x)}{t} &\leq \frac{f(y) - f(ty + (1-t)x)}{1-t} \\ \iff (1-t)(f(ty + (1-t)x) - f(x)) &\leq t(f(y) - f(ty + (1-t)x)) \\ \iff f(ty + (1-t)x) - (1-t)f(x) &\leq tf(y) \\ \iff f(ty + (1-t)x) &\leq tf(y) + (1-t)f(x) \end{aligned}$$

□

REMARQUE 9.43. Sous les hypothèses de la Proposition 9.41, on peut aussi vérifier les équivalences entre les trois propriétés suivantes :

- (a) f est strictement convexe;
- (b) $f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$ pour tous $x, a \in I, x \neq a$;
- (c) $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante.

PROPOSITION 9.44. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable, définie sur un intervalle. Alors f est convexe $\iff f'' \geq 0$.
De même, f est strictement convexe $\iff f'' > 0$.

PREUVE. En appliquant les Propositions 9.41 et 7.36,

$$f \text{ est convexe} \iff f' \text{ est croissante} \iff f'' \geq 0. \quad \square$$

$$f \text{ est strictement convexe} \iff f' \text{ est strictement croissante} \iff f'' > 0.$$

EXEMPLES 9.45.

- (i) La fonction exponentielle est strictement convexe, parce que $\exp'' = \exp > 0$ sur \mathbb{R} .
- (ii) La fonction \ln est strictement concave, parce que $\ln'' x = -\frac{1}{x^2} < 0$ sur $]0, +\infty[$.

THÉORÈME 9.46. Soit I un intervalle ouvert et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable. Soit $a \in I$. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h \in I$, on a

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + h^2\varepsilon(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

PREUVE. Définissons sur I la fonction

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \right)$$

et pour $|h|$ assez petit,

$$\varepsilon(h) = \frac{g(a+h)}{h^2}.$$

Le but est de montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

La fonction g est 2 fois dérivable sur I comme somme de fonctions 2 fois dérivables. De plus, $g(a) = 0$ et pour tout $x \in I$,

$$g'(x) = f'(x) - f'(a) - f''(a)(x - a).$$

Soit $\delta = \delta(a) > 0$ assez petit pour que $]a - \delta, a + \delta[\subset I$ et soit h tel que $0 < |h| < \delta$. On applique une première fois le taf à la fonction g entre a et $a + h$ pour obtenir l'existence de c_h entre a et $a + h$ tel que

$$\begin{aligned} g(a + h) - g(a) &= h g'(c_h) = h(f'(c_h) - f'(a) - f''(a)(c_h - a)) \\ &= h(c_h - a) \left(\frac{f'(c_h) - f'(a)}{c_h - a} - f''(a) \right). \end{aligned}$$

On a alors

$$\varepsilon(h) = \frac{c_h - a}{h} \left(\frac{f'(c_h) - f'(a)}{c_h - a} - f''(a) \right).$$

En notant que $|c_h - a| < h$, on obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f'(c_h) - f'(a)}{c_h - a} - f''(a) \right) = 0$$

et

$$|\varepsilon(h)| \leq \left| \frac{f'(c_h) - f'(a)}{c_h - a} - f''(a) \right|.$$

Donc $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. □

THÉORÈME 9.47. *Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable. Soit $a \in I$ tel que $f'(a) = 0$.*

- (1) *Si $f''(a) > 0$, alors a est un minimum local strict.*
- (2) *Si $f''(a) < 0$, alors a est un maximum local strict.*

PREUVE. Pour $h \in \mathbb{R}$ tel que $a + h \in I$, on peut écrire

$$f(a + h) - f(a) = \frac{f''(a)}{2} h^2 + h^2 \varepsilon(h) = \frac{h^2}{2} (f''(a) + 2\varepsilon(h)).$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

- (1) Si $f''(a) > 0$, alors $\exists \delta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} 0 < |h| < \delta &\Rightarrow |2\varepsilon(h)| \leq \frac{f''(a)}{2} \Rightarrow 2\varepsilon(h) \geq -\frac{f''(a)}{2} \\ &\Rightarrow \frac{h^2}{2} (f''(a) + 2\varepsilon(h)) \geq \frac{h^2}{2} \left(f''(a) - \frac{f''(a)}{2} \right) = \frac{h^2 f''(a)}{4} > 0. \end{aligned}$$

On a trouvé l'existence de $\delta > 0$ tel que

$$0 < |h| < \delta \Rightarrow f(a + h) - f(a) > 0.$$

Autrement dit, a est un minimum local strict.

- (2) Si $f''(a) < 0$. On applique (1) à $-f$.

□

10. Inégalités liées à la convexité

Les inégalités étudiées dans cette section se rencontrent très souvent dans les applications.

10.1. Inégalité de Jensen.

PROPOSITION 10.48 (Inégalité de Jensen). *Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors*

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n)$$

pour tous $x_1, \dots, x_n \in I$ et $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ vérifiant l'égalité $t_1 + \cdots + t_n = 1$.

PREUVE. Pour $n = 2$, on retrouve la définition de la convexité.

Procédant par récurrence. Supposons que la relation est vraie au rang $n - 1$. Soient $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ des nombres tels que $t_1 + \cdots + t_n = 1$. En posant

$$t'_{n-1} = t_{n-1} + t_n,$$

On a $t_1 + \cdots + t_{n-2} + t'_{n-1} = t_1 + \cdots + t_n = 1$. On pose également

$$x'_{n-1} := \frac{t_{n-1}x_{n-1} + t_nx_n}{t_{n-1} + t_n}.$$

Alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence et la définition de la convexité, on obtient que

$$\begin{aligned} f(t_1x_1 + \cdots + t_{n-1}x_{n-1} + t_nx_n) &= f(t_1x_1 + \cdots + t_{n-2}x_{n-2} + t'_{n-1}x'_{n-1}) \\ &\leq t_1f(x_1) + \cdots + t_{n-2}f(x_{n-2}) + t'_{n-1}f(x'_{n-1}) \\ &= t_1f(x_1) + \cdots + t_{n-2}f(x_{n-2}) \\ &\quad + (t_{n-1} + t_n)f\left(\frac{t_{n-1}}{t_{n-1} + t_n}x_{n-1} + \frac{t_n}{t_{n-1} + t_n}x_n\right) \\ &\leq t_1f(x_1) + \cdots + t_{n-2}f(x_{n-2}) \\ &\quad + (t_{n-1} + t_n)\left(\frac{t_{n-1}}{t_{n-1} + t_n}f(x_{n-1}) + \frac{t_n}{t_{n-1} + t_n}f(x_n)\right) \\ &= t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n). \end{aligned}$$

□

10.2. Inégalité de Young. Rappelons l'inégalité élémentaire

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

En effet, elle est équivalente à

$$(x - y)^2 \geq 0.$$

Pour la généraliser, introduisons la notion suivante :

DÉFINITION. Deux réels $p, q > 1$ sont appelés des *exposants conjugués* si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

EXEMPLES 10.49. Les exposants $p = 3$ et $q = \frac{3}{2}$ sont conjugués, et $p = 2$ est conjugué à soi-même :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

REMARQUE 10.50. On peut montrer les équivalences suivantes :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff (p-1)(q-1) = 1 \iff q = \frac{p}{p-1} \iff p = \frac{q}{q-1}.$$

PROPOSITION 10.51 (Young). *Si p et q sont des exposants conjugués, alors*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

pour tous $x, y \geq 0$.

PREUVE. Les cas $x = 0$ et $y = 0$ sont évidents. Si $x, y > 0$, alors la concavité du logarithme naturel implique l'inégalité

$$\ln \left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \right) \geq \frac{1}{p} \ln x^p + \frac{1}{q} \ln y^q = \ln x + \ln y = \ln(xy).$$

Comme la fonction exponentielle est croissante, on en déduit que

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} = \exp \left(\ln \left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \right) \right) \geq \exp(\ln(xy)) = xy. \quad \square$$

REMARQUES 10.52.

(i) La preuve montre que

$$xy = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \iff x^p = y^q.$$

(ii) En utilisant la notion de l'intégrale, on pourra donner une preuve géométrique très simple de l'inégalité de Young.

10.3. Inégalité de Hölder. Rappelons de la géométrie ou de la mécanique que le *produit scalaire* de deux vecteurs a et b est défini par la formule

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \gamma,$$

où $|a|$ et $|b|$ désignent les longueurs des vecteurs, et γ désigne l'angle des deux vecteurs. On en déduit l'inégalité

$$|a \cdot b| \leq |a| \cdot |b|.$$

En utilisant les coordonnées cartésiennes dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , cette relation prend les formes suivantes, appelées des *inégalités de Cauchy-Schwarz* :

$$|a_1b_1 + a_2b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

et

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

On a le résultat plus général suivant :

PROPOSITION 10.53 (Hölder). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0$, et p et q des exposants conjugués. Alors

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq (a_1^p + \dots + a_n^p)^{1/p} \cdot (b_1^q + \dots + b_n^q)^{1/q}.$$

PREUVE. Si $a_1^p + \dots + a_n^p = 0$ ou si $b_1^q + \dots + b_n^q = 0$, alors $a_i = 0$ pour tout i , ou $b_i = 0$ pour tout i , d'où les deux membres sont nuls.

Si $a_1^p + \dots + a_n^p = b_1^q + \dots + b_n^q = 1$, alors en appliquant l'inégalité de Young, on obtient que

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i^p}{p} + \frac{b_i^q}{q} \right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Pour montrer l'inégalité de Hölder pour $a_1^p + \dots + a_n^p > 0$ et $b_1^q + \dots + b_n^q > 0$, posons

$$s := \frac{1}{(a_1^p + \dots + a_n^p)^{1/p}}, \quad t := \frac{1}{(b_1^q + \dots + b_n^q)^{1/q}}.$$

Alors

$$(sa_1)^p + \dots + (sa_n)^p = s^p (a_1^p + \dots + a_n^p) = 1$$

et

$$(sb_1)^q + \dots + (sb_n)^q = t^q (b_1^q + \dots + b_n^q) = 1,$$

donc

$$\sum_{i=1}^n (sa_i)(tb_i) \leq 1$$

par l'inégalité précédente. On conclut en divisant cette inégalité par st . \square

REMARQUE 10.54. La preuve montre que l'inégalité de Hölder est une égalité si et seulement si $a_i^p = b_i^q$ pour tout i .

10.4. *Inégalités entre les moyennes. Rappelons l'inégalité entre les moyennes géométrique et arithmétique : si $c_1, \dots, c_n > 0$, alors

$$\sqrt[n]{c_1 \cdots c_n} \leq \frac{c_1 + \dots + c_n}{n}.$$

Pour $c_1, \dots, c_n > 0$ fixés quelconques, posons

$$f(0) := \sqrt[n]{c_1 \cdots c_n}, \quad \text{et} \quad f(x) := \left(\frac{c_1^x + \dots + c_n^x}{n} \right)^{1/x} \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

Notons que $f(1)$ est la moyenne arithmétique. Les valeurs

$$f(-1) = \frac{n}{\frac{1}{c_1} + \dots + \frac{1}{c_n}} \quad \text{et} \quad f(2) = \sqrt{\frac{c_1^2 + \dots + c_n^2}{n}}$$

sont appelées les *moyennes harmonique et quadratique* de c_1, \dots, c_n .

PROPOSITION 10.55 (Inégalités entre les moyennes). La fonction f est croissante,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \min \{c_1, \dots, c_n\} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \max \{c_1, \dots, c_n\}.$$

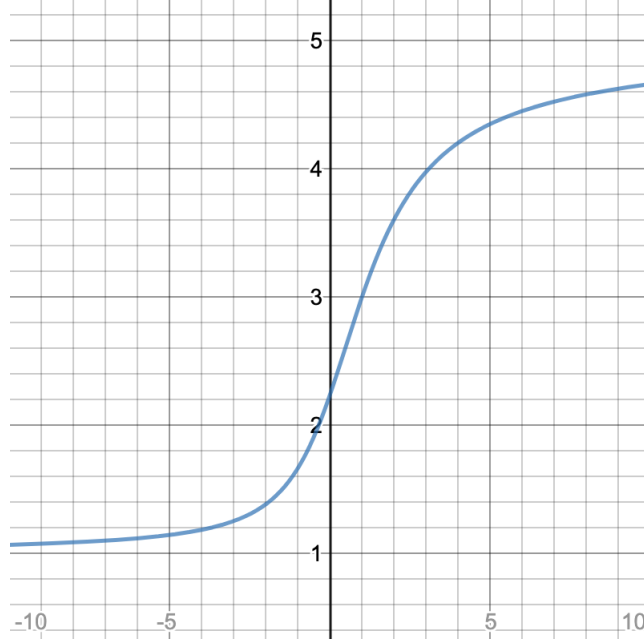


FIGURE 2. Graphe de la fonction f pour $c_1 = 1$ et $c_2 = 5$

PREUVE. Si $0 < x < y$ ou $y < x < 0$, alors en appliquant l'inégalité de Hölder aux nombres a_1^x, \dots, a_n^x et $1, \dots, 1$ avec l'exposant $p = y/x$, on obtient que

$$a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x \leq (a_1^y + a_2^y + \dots + a_n^y)^{x/y} n^{1-(x/y)}.$$

En prenant la puissance d'exposant $1/x$ deux deux membres, on obtient $f(x) \leq f(y)$ dans le premier cas, et (comme $x < 0$) $f(x) \geq f(y)$ dans le deuxième cas.

Pour montrer les inégalités pour $x = 0$, appliquons l'inégalité entre les moyennes géométrique et arithmétique aux nombres a_1^y, \dots, a_n^y pour obtenir

$$f(0)^y = \sqrt[n]{a_1^y \cdots a_n^y} \leq \left(\frac{a_1^y + a_2^y + \dots + a_n^y}{n} \right) = f(y)^y.$$

On en déduit que $f(0) \leq f(y)$ si $y > 0$, et $f(0) \geq f(y)$ si $y < 0$.

En posant $c := \max \{c_1, \dots, c_n\}$, on a

$$cn^{-1/x} \leq f(x) \leq c$$

pour tout $x > 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = c$. Enfin,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{c_1^{-t} + \dots + c_n^{-t}}{n} \right)^{-1/t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{(1/c_1)^t + \dots + (1/c_n)^t}{n} \right)^{1/t}} \\ &= \frac{1}{\max \{1/c_1, \dots, 1/c_n\}} = \min \{c_1, \dots, c_n\}. \end{aligned} \quad \square$$

REMARQUES 10.56.

- (i) Si $c_1 = \dots = c_n$, alors la fonction f de la Proposition 10.55 est constante. La preuve montre que f est strictement croissante dans les autres cas.

(ii) Une application de la règle de l'Hôpital montre que f est continue en 0, et donc elle est continue partout. En effet,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \ln f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{c_1^x + \dots + c_n^x}{n} \right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c_1^x \ln c_1 + \dots + c_n^x \ln c_n}{n} \cdot \frac{c_1^x + \dots + c_n^x}{n} \\ &= \frac{\ln c_1 + \dots + \ln c_n}{n} \\ &= \ln \sqrt[n]{c_1 \cdots c_n},\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \exp(\ln \sqrt[n]{c_1 \cdots c_n}) = \sqrt[n]{c_1 \cdots c_n} = f(0)$$

par la continuité de la fonction exponentielle.