CONTINUITÉ D'APPLICATIONS ENTRE EVN

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|_E$ et F un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|_F$.

1. Limites

Définition 1.1. Soient $A \subset E$ et $a \in \overline{A \cap (E\backslash\{a\})}$. Soient $f : A \longrightarrow F$ une application et $\ell \in F$. On dit que f *admet pour limite* ℓ *au point* a si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0 \ \left|\ \begin{cases} x \in A \\ 0 < \|x-a\|_E < \eta \end{cases} \right. \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \eta.$$

PROPOSITION 1.2. *Si un tel élément ℓ existe, alors il est unique. On l'appelle alors limite de f au point a et on la note* $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ *ou* $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

DÉMONSTRATION. On suppose qu'il existe $\ell' \neq \ell$ vérifiant la définition. Soit $\varepsilon = \frac{\|\ell-\ell'\|_F}{4}$ (> 0).

$\exists\, \eta_1 > 0 \mid \begin{cases} x \in A \\ 0 < \|x-a\|_E < \eta_1 \end{cases} \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon$;

$\exists\, \eta_2 > 0 \mid \begin{cases} x \in A \\ 0 < \|x-a\|_E < \eta_2 \end{cases} \Rightarrow \|f(x) - \ell'\|_F < \varepsilon$. On pose $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$.

Or $a \in \overline{A \cap (E\backslash\{a\})}$, donc $\exists\, x \in \overline{A \cap (E\backslash\{a\})} \mid \|x-a\|_E < \eta$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{On a } 0 < \|x-a\|_E < \eta_1 \\ \text{et } 0 < \|x-a\|_E < \eta_2 \end{array}\right\} \text{donc } \|f(x)-\ell\|_F < \varepsilon \text{ et } \|f(x)-\ell'\|_F < \varepsilon.$$

$4\varepsilon = \|\ell - \ell'\|_F \leqslant \|f(x) - \ell\|_F + \|f(x) - \ell'\|_F < 2\varepsilon \longrightarrow$ impossible. ■

Remarque 1.3. Si A est un ouvert et si $a \in A$, pour η assez petit, on a $\|x-a\|_E < \eta \Rightarrow x \in A$. La définition s'écrit alors simplement

$$\forall\, \varepsilon,\ \exists\, \eta > 0 \mid 0 < \|x-a\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon.$$

THÉORÈME 1.4 (Opérations algébriques). *Soient $A \subset E$, $a \in \overline{A \cap (E\backslash\{a\})}$. Soient $f, g : A \longrightarrow F$ deux applications. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, ℓ_1 et ℓ_2 deux éléments de F. On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_2$. Alors :*

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2 \quad ; \quad \lim_{x\to a} \lambda\, f(x) = \lambda\, \ell_1 \quad ; \quad \lim_{x\to a} \|f(x)\|_F = \|\ell_1\|_F.$$

Dans le cas où $F = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to a}(f\, g)(x) = \ell_1\, \ell_2 \quad ; \quad \ell_1 \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell_1}\ (f(x) \neq 0).$$

DÉMONSTRATION. Ce sont les mêmes que pour les fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en remplaçant la valeur absolue par $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. ■

THÉORÈME 1.5 (Composée). *Soit G un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|_G$. Soient $A \subset E$, $B \subset F$. Soient $a \in \overline{A \cap (E\backslash\{a\})}$ et $b \in \overline{B \cap (F\backslash\{b\})}$. Soit $\ell \in G$. Soient $f : A \longrightarrow F$ et $g : B \longrightarrow G$ deux applications telles que :*

- $f\left(A \cap (E\backslash\{a\})\right) \subset B \cap (F\backslash\{b\})$
- $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ *et* $g(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} \ell$.

Alors on a que $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = \ell$.

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{y\to b} g(x) = \ell$, on a donc :

$$\exists\, \eta_1 > 0 \mid \left\{\begin{array}{l} y \in B \\ 0 < \|y-b\|_F < \eta_1 \end{array}\right. \Rightarrow \|g(y)-\ell\|_G < \varepsilon.$$

De plus, puisque $\lim_{x\to a} f(x) = b$, on a aussi :

$$\exists\, \eta > 0 \mid \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ 0 < \|x-a\|_E < \eta \end{array}\right. \Rightarrow \|f(x)-b\|_F < \eta_1.$$

Pour tout $x \in A$ tel que $0 < \|x-a\|_E < \eta$, on a $x \neq a$, donc $f(x) \neq b$, $f(x) \in B$ et donc $0 < \|f(x)-b\|_F < \eta_1$. Alors $\|g(f(x))-\ell\|_G < \varepsilon$. Autrement dit, $\|(g\circ f)(x)-\ell\|_G < \varepsilon$ donc $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = \ell$. ■

2. Continuité en un point

Définition 2.1. Soient $A \subset E$ et $a \in A$. Soit $f : A \longrightarrow F$ une application. On dit que f est *continue au point a* si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0 \mid x \in A \text{ et } \|x-a\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\|_F < \varepsilon.$$

Remarque 2.2.

- Comme pour la définition de la limite, si A est un ouvert, cette définition s'écrira : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0 \mid \|x-a\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\|_F < \varepsilon$.
- f est continue en a si et seulement si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$ car si $x = a$, $\|f(x)-f(a)\|_F = 0 < \varepsilon, \forall\, \varepsilon > 0$.

THÉORÈME 2.3 (Opérations algébriques). *Soient $A \subset E$, $a \in A$. Soient $f, g : A \longrightarrow F$ deux applications continues au point a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les applications $f+g$, λf sont continues au point a.*
De plus, l'application $\|f\|_F$ définie par

$$\begin{aligned} \|f\|_F : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|f(x)\|_F \end{aligned}$$

est continue en a.
Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, l'application fg est continue au point a. De plus, $\exists\, \varepsilon > 0 \mid \forall\, x \in B_E(a,\varepsilon) \cap A,\ f(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ est continue au point a.

DÉMONSTRATION. Conséquence du théorème 1.4. ■

THÉORÈME 2.4 (Composition). *Soit G un troisième espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|_G$. Soient $A \subset E$, $B \subset F$, $a \in A$. Soient $f : A \longrightarrow F$ et $g : B \longrightarrow G$ deux applications telles que*

$f(A) \subset B$. On suppose que f est continue au point a et que g est continue au point $f(a)$. Alors $g \circ f$ est continue au point a.

DÉMONSTRATION. Conséquence du théorème 1.5 ■

THÉORÈME 2.5. *Soient $A \subset E$, $a \in A$ et $f : A \longrightarrow F$. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de A telle que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, la suite $f(u_n)$ tend vers $f(a)$ quand $n \to \infty$.*

DÉMONSTRATION. "$\Rightarrow$" : On suppose que f est continue au point a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A telle que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Soit $\varepsilon > 0$. $\exists\ \eta > 0 \mid \begin{cases} x \in A \\ \|x-a\|_E < \eta \end{cases} \Rightarrow$ $\|f(x) - f(a)\|_F > \varepsilon$. D'autre part, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\|u_n - a\|_E < \eta$. Donc pour $n \geqslant N$, $\|f(u_n) - f(a)\|_F < \varepsilon$.

"$\Leftarrow$" (par contraposée) : On suppose que f n'est pas continue au point a. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $u_n \in A$ avec $\|u_n - a\|_E < \frac{1}{n}$ et $\|f(u_n) - f(a)\|_F \geqslant \varepsilon$. On a donc $\|u_n - a\|_E \to 0$, c'est-à-dire $u_n \to a$.
Mais $\|f(u_n) - f(a)\|_F \geq \varepsilon$. Donc , $f(u_n)$ ne converge pas vers $f(a)$.

■

THÉORÈME 2.6. *Soient $F_1, \dots, F_p$ des espaces vectoriels munis respectivement des normes $\|\cdot\|_{F_1}, \dots, \|\cdot\|_{F_p}$. Soient $A \subset E$, $a \in A$ et f une application définie par :*

$$f : \begin{array}{l} A \longrightarrow F_1 \times \cdots \times F_p \\ x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{array} \quad \textit{où} \quad \forall\, i \in \{1, \dots, p\}, \quad f_i : \begin{array}{l} A \longrightarrow F_i \\ x \longmapsto f_i(x) \end{array}$$

Alors f est continue au point a si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, f_i est continue au point a.
On a muni ici l'espace produit de la norme $\|(x_1, \dots, x_p)\| = \max_{i=1}^{p} \|x_i\|_{F_i}$.

DÉMONSTRATION. f est continue au point a
$\Longleftrightarrow$ pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, $f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$
$\Longleftrightarrow \forall\, i \in \{1, \dots, p\},\ f_i(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_i(a)$
$\Longleftrightarrow \forall\, i \in \{1, \dots, p\},\ f_i$ est continue au point a. ■

3. Continuité sur un ensemble

Définition 3.1. Soient $A \subset E$, $B \subset A$ et $f : A \longrightarrow F$. On dit que f est *continue sur* B si f est continue en tout point de B.

Définition 3.2 (Continuité uniforme). Soient A et B tels que $B \subset A \subset E$ et $f : A \longrightarrow F$. On dit que f est *uniformément continue sur* B si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0 \mid \forall\, x, y \in B,\ \|x - y\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon.$$

Remarque 3.3. f uniformément continue sur $B \Rightarrow f$ continue sur B.
La réciproque n'est pas vraie en général. Par exemple, $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

THÉORÈME 3.4. *Soient A une partie ouverte de E et $f : A \longrightarrow F$ une application continue sur A. Alors pour tout ouvert $\Omega \subset F$, $f^{-1}(\Omega) := \{x \in A \mid f(x) \in \Omega\}$ est un ouvert de E.*

DÉMONSTRATION. Soient Ω un ouvert de F et $x \in f^{-1}(\Omega)$. On a $f(x) \in \Omega$. Alors $\exists\ \eta > 0 \mid B_F(f(x), \eta) \subset \Omega$. f étant continue au point x, on a :
$\exists\ \varepsilon > 0 \mid \begin{cases} y \in A \\ \|y - x\|_E < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \|f(y) - f(x)\|_F < \eta.$
Or A est ouvert, donc $\exists\ \varepsilon_1 > 0 \mid B_E(x, \varepsilon_1) \subset A$. Soit maintenant $\varepsilon_2 = \min(\varepsilon, \varepsilon_1)$.
Si $y \in B_E(x, \varepsilon_2)$, alors $y \in A$ et $\|y - x\|_E < \varepsilon$ donc $y \in f^{-1}(\Omega)$.
On a montré que $B_E(x, \varepsilon_2) \subset f^{-1}(\Omega)$. ■

4. Continuité sur les compacts

THÉORÈME 4.1 (Théorème de Heine). *Soit K un compact et $f : K \to F$ une fonction continue sur K. Alors f est uniformément continue sur K.*

DÉMONSTRATION. Supposons que f n'est pas uniformément continue sur K. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x, y \in K$ tels que $\|x - y\|_E < \eta$ et $\|f(x) - f(y)\|_F \geq \varepsilon$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n, y_n \in K$ tels que

$$\|x_n - y_n\|_E < \frac{1}{n}, \quad \|f(x_n) - f(y_n)\|_F \geq \varepsilon.$$

K étant un compact, il existe une suite extraite $(x_\phi(n))_n$ qui converge vers un élément $x \in K$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|x_{\phi(n)} - y_{\phi(n)}\|_E < \frac{1}{\phi(n)}, \quad \|f(x_{\phi(n)}) - f(y_{\phi(n))}\|_F \geq \varepsilon.$$

Donc $x_{\phi(n)} - y_{\phi(n)}$ converge vers 0 et $y_{\phi(n)} = y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)} + x_{\phi(n)}$ tend vers x. Par continuité de f au point x, les suites $f(x_{\phi(n)})$ et $f(y_{\phi(n)})$ convergent toutes les deux vers $f(x)$. Par passage à la limite dans l'inégalité

$$\|f(x_{\phi(n)}) - f(y_{\phi(n)})\|_F \geq \varepsilon,$$

on obtient $0 \geq \varepsilon$. D'où la contradiction. ■

THÉORÈME 4.2. *Soient K un compact de E et $f : K \longrightarrow F$ une application continue sur K. Alors $f(K) := \{y \in F \mid \exists\ x \in K$ avec $f(x) = y\}$ est un compact de F.*

DÉMONSTRATION. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f(K)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $y_n = f(x_n)$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in K$. Par continuité de f en x, $y_{varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)})$ converge vers $f(x) \in f(K)$. ■

THÉORÈME 4.3. *Soient K un compact de E et $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur K. Alors f est bornée sur K et elle y atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe $a \in K$ et $b \in K$ tel que pour tout $x \in K$,*

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

DÉMONSTRATION. D'après le théorème précédent, $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$. En particulier, il est borné donc il existe $M \geq 0$ tel que $\forall\, x \in K,\ |f(x)| \leqslant M$.

Montrons qu'il existe un élément b de K vérifiant $\sup_K f = f(b)$:
On pose $s = \sup_K f$. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, x_n \in K \mid s - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant s$.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ avec $b \in K$ (par compacité de K). Par continuité de f au point b, $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(b)$.
$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a alors $\underbrace{s - \dfrac{1}{\varphi(n)}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} s} < \underbrace{f(x_{\varphi(n)})}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} f(b)} \leqslant s$, donc $f(b) = s$.
De manière analogue, on montre qu'il existe un élément $a \in K$ vérifiant $\inf_K f = f(a)$. ■

THÉORÈME 4.4. *Dans $\mathbb{R}^n$, toutes les normes sont équivalentes.*

PROOF. Munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\|\cdot\|$ une autre norme sur $\mathbb{R}^n$.

Vérifions que c'est une application (uniformément) continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Notons $e_1, \cdots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $a = (a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ et $x = (x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

$$\|x - a\| = \|\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)e_i\| \leq \|x - a\|_\infty \sum_{i=1}^n \|e_i\|.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, en posant $\eta = \varepsilon / \sum_{i=1}^n \|e_i\|$, on a

$$\|x - a\|_\infty < \eta \Longrightarrow \|x - a\| < \varepsilon.$$

Considérons la sphère unité $S(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_\infty = 1\} = B'(0,1) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(0,1))$. C'est un ensemble fermé et borné, c'est donc un compact. D'après le théorème précédent, il existe $a, b \in S(0,1)$ tel que, pour tout $x \in S(0,1)$,

$$\|a\| \leq \|x\| \leq \|b\|.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ avec $x \neq 0$, $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S(0,1)$ donc

$$\|a\| \leq \|\frac{x}{\|x\|_\infty}\| \leq \|b\|$$

et

$$\|a\|\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \|b\|\|x\|_\infty.$$

Remarquons que la sphère unité ne contient pas 0 donc que $\|a\| \neq 0$ et $\|b\| \neq 0$. Les deux normes sont bien équivalentes.

■

5. Applications linéaires continues

On considère deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$.

Définition 5.1. Soit une application $f : E \to F$. On dit qu'elle est

- Linéaire : si pour tout $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$
On a alors nécessairement $f(0) = 0$.
- Lipshtzienne : s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tous $x, y \in E$, on a
$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$
Plus précisément, on dit qu'elle est k-lipshitzienne.
- Bornée sur un ensemble $A \in E$: s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in A$,
$$\|f(x)\| \leq k.$$

THÉORÈME 5.2. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est uniformément continue sur E*
(ii) *f est continue sur E*
(iii) *f est continue en 0*
(iv) *f est bornée sur $B'(0,1) = \{x \in E : \|x\| = 1\}$*
(v) *f est bornée sur $S(0,1) = \{x \in E : \|x\| = 1\}$*
(vi) *Il existe $k \in \mathbb{R}+$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq k\|x\|$*
(vii) *f est lipshitzienne*

DÉMONSTRATION. Voir Exercice 1. ■

THÉORÈME 5.3. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire continue. Alors on a égalité entre les nombres suivants :*

- $\sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|}$
- $\sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$
- $\sup_{\|x\| = 1} \|f(x)\|$

Ce nombre est appelé **norme de l'application** *f. On le note $|||f|||$.*

DÉMONSTRATION. Voir Exercices. ■

Définition 5.4. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F.

THÉORÈME 5.5. *$||| \cdot |||$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$.*

DÉMONSTRATION. Voir Exercices. ■

THÉORÈME 5.6. *Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue.*

PROOF. Soit $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec les $x_i \in \mathbb{R}$. Munissons E de la norme $\|x\|_\infty = \max_{i=1}^n |x_i|$.
Soit f une application linéaire de E dans F.

$$|f(x)| = |f(\sum_{i=1}^n x_i e_i)| = |\sum_{i=1}^n x_i f(e_i)| \leq \sum_{i=1}^n |x_i f(e_i)| \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^n |f(e_i)|.$$

On voit que f vérifie la condition (vi) du théorème 1.2 avec $k = \sum_{i=1}^n |f(e_i)|$. ■

Définition 5.7. On dit que l'espace vectoriel $(E, \|\cdot\|)$ est complet si toute suite de Cauchy y est convergente.

THÉORÈME 5.8. *Si $(F, \|\cdot\|)$ est complet, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est complet.*

DÉMONSTRATION. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p > q \geq N$, on a $|||f_p - f_q||| < \varepsilon/|x|$. Donc pour tous $p > q \geq N$, on a

$$\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq |||f_p - f_q||| \|x\| < \frac{\varepsilon}{|x|}|x| = \varepsilon.$$

Remarquons que pour $x = 0$, la suite $(f_n(0))_n$ est constante égale à 0.
Nous avons pour l'instant montré pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy dans F qui est supposé complet. Cette suite est alors convergente dans F et nous pouvons poser

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \in F.$$

Pour tous $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(\lambda x + y) = \lambda f_n(x) + f_n(y)$. Par passage à la limite, on obtient $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.
Autrement dit, l'application f est donc linéaire.

Montrons maintenant que la suite $(f_n)_n$ converge vers f dans $\mathcal{L}(E, F)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Utilisant une fois de plus que la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p > q \geq N$, $|||f_p - f_q||| < \varepsilon$.
Pour tout $x \in E$ et pour tous $p > q \geq N$,

$$\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq |||f_p - f_q||| \|x\| < \varepsilon \|x\|.$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient $\|f(x) - f_q(x)\| < \varepsilon \|x\|$. Donc pour tout $q \geq N$, on a $|||f - f_q||| < \varepsilon$. Ceci montre que $|||f - f_q|||$ converge vers 0 quand q tend vers $+\infty$.

De plus, en prenant en particulier $\varepsilon = 1$ et $q = N$, ce qui précède montre que $f - f_N$ est continue sur E d'où $f = f_N + f - f_N$ est continue dur E. ■