

Chapitre 3 - LIMITES DE FONCTIONS RÉELLES

1. Rappels sur le vocabulaire des fonctions

On considère E et F deux sous-ensembles de \mathbb{R} . Une fonction $f : E \rightarrow F$ associe à chaque $x \in E$ un élément unique $y = f(x) \in F$.

- y est appelée *image* de x .
- x est appelé *antécédent* de y .
- E est appelé *domaine de définition* de f . On le note $D(f)$.
- On appelle *image* de E l'ensemble des images des éléments de E . On note cet ensemble $f(E)$. Autrement dit,

$$f(E) = \{f(x) : x \in E\},$$

$$y \in f(E) \iff \exists x \in E : f(x) = y.$$

- On appelle *graphe* de f le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 défini par

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in E, y = f(x)\}.$$

- Soit $E' \subset E$. On appelle *restriction* de f à E' et on note $f|_{E'} : E' \rightarrow F$ définie par $f|_{E'}(x) = f(x)$.

EXEMPLES 1.1.

- On notera id_E la fonction $\text{id}_E : E \rightarrow E$ définie par $\text{id}_E(x) = x$.
- La formule $f(x) := x$ définit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $D(f) = \mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
- La formule $g(x) := x^2$ définit une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $D(g) = \mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$.
- La formule $h(x) := \sin x$ définit une fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $D(h) = \mathbb{R}$ et $h(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Comme le montrent les deux derniers exemples, $f(E)$ peut être un sous-ensemble strictement inclus dans F .

DÉFINITION (Surjective). On dit qu'une fonction $f : E \rightarrow F$ est *surjective* si tout élément de F admet au moins un antécédent dans E . Autrement dit,

$$f \text{ est surjective} \iff F = f(E) \iff \forall y \in F, \exists x \in E : f(x) = y.$$

REMARQUE 1.2. Par définition, $f : E \rightarrow f(E)$ est toujours une fonction surjective.

DÉFINITION (Injective). On dit qu'une fonction $f : E \rightarrow F$ est *injective* si tout élément de F admet au plus un antécédent dans E . Autrement dit, f est injective si et seulement si, pour tout $x, y \in E$,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

DÉFINITION (bijective). On dit qu'une fonction $f : E \rightarrow F$ est *bijective* si elle est à la fois injective et surjective. Autrement dit, f est bijective si tout élément de F admet un et un seul antécédent.

Formellement, f est bijective si

$$\forall y \in F, \exists! x \in E : f(x) = y.$$

DÉFINITION (Réciproque). Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction bijective. La fonction réciproque de f est la fonction $f^{-1} : F \rightarrow E$ définie par

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

REMARQUE 1.3. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction bijective.

- $f^{-1} : F \rightarrow E$ est bijective.
- Pour tout $x \in E$, $f^{-1}(f(x)) = x$. Autrement dit, $f^{-1} \circ f = \text{id}_E$.
- Pour tout $y \in F$, $f(f^{-1}(y)) = y$. Autrement dit, $f \circ f^{-1} = \text{id}_F$.

PROPOSITION 1.4. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction. S'il existe une fonction $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$, alors f est bijective et $g = f^{-1}$.

PREUVE.

Supposons l'existence d'une telle fonction g . Alors pour tout $y \in F$, en posant $x = g(y)$, on a $f(x) = f \circ g(y) = \text{id}_F(y) = y$. f est donc surjective.

De plus, pour tout $x \in E$ et $x' \in E$,

$$f(x) = f(x') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \iff \text{id}_E(x) = \text{id}_E(x') \iff x = x'.$$

Donc f est injective.

Finalement, f est bijective et

$$f(x) = y \Rightarrow g(f(x)) = g(y) \iff x = \text{id}_E(x) = g(y).$$

Ceci montre que $f^{-1} = g$.

□

Rappelons quelques notions :

DÉFINITIONS. Une fonction $f : E \rightarrow F$ est dite

- *croissante* si

$$x, y \in E \text{ et } x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y);$$

- *strictement croissante* si

$$x, y \in E \text{ et } x < y \Rightarrow f(x) < f(y);$$

- *décroissante*, si

$$x, y \in E \text{ et } x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y);$$

- *strictement décroissante* si

$$x, y \in E \text{ et } x < y \Rightarrow f(x) > f(y);$$

- *monotone*, si elle est croissante ou décroissante;
- *strictement monotone*, si elle est strictement croissante ou strictement décroissante;
- *majorée*, si l'ensemble $f(E)$ est majoré, c'est-à-dire, s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in D$;
- *minorée*, si l'ensemble $f(E)$ est minoré, c'est-à-dire, s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in D$;
- *bornée*, si l'ensemble $f(E)$ est borné, c'est-à-dire, si f est à la fois majorée et minorée.

PROPOSITION 1.5. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction strictement croissante (resp. décroissante) et surjective, alors f est bijective et $f^{-1} : F \rightarrow E$ est strictement croissante (resp. décroissante).

PREUVE. Supposons que f est strictement croissante et surjective. Alors pour tout $x, x' \in E$, $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$. En effet, quitte à inverser les rôles de x et x' , on peut supposer que $x < x'$. Alors $f(x) < f(x')$ et en particulier, $f(x) \neq f(x')$.

La fonction est donc injective. Montrons que f^{-1} est strictement croissante.

Soient $y, y' \in F$ tels que $y < y'$. Alors par contraposée de la définition de la croissance de f ,

$$y = f(f^{-1}(y) < f(f^{-1}(y')) = y' \Rightarrow f^{-1}(y) < f^{-1}(y').$$

□

REMARQUE 1.6. Il y a des symétries entre ces notions :

f est décroissante $\iff -f$ est croissante;

f est strictement décroissante $\iff -f$ est strictement croissante;

f est minorée $\iff -f$ est majorée.

Pour deux fonctions données, on peut définir de nouvelles fonctions :

DÉFINITIONS. Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On définit la *somme*, la *différence*, le *produit*, le *quotient* et la *composition* de f et g par les formules suivantes :

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad x \in D(f + g) := A \cap B;$$

$$(f - g)(x) := f(x) - g(x), \quad x \in D(f - g) := A \cap B;$$

$$(fg)(x) := f(x)g(x), \quad x \in D(fg) := A \cap B;$$

$$(f/g)(x) := f(x)/g(x), \quad x \in D(f/g) := \{x \in A \cap B : g(x) \neq 0\};$$

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)), \quad x \in D(f \circ g) := \{x \in B : g(x) \in A\}.$$

PROPOSITION 1.7.

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux fonctions bijectives. Alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est bijective. De plus, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

PREUVE.

Pour tout $z \in G$, il existe un unique $y \in F$ tel que $z = f(y)$. De même, il existe un unique $x \in E$ tel que $g(x) = y$. Finalement, il existe un unique $x \in E$ tel que $z = f \circ g(x)$. Remarquons que pour tout $x \in E$ et pour tout $z \in G$, on a

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \text{id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \text{id}_E.$$

et

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \text{id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{id}_G.$$

En vertu de la proposition 1.4, on peut conclure que $g \circ f$ est bijective et que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

□

PROPOSITION 1.8.

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux fonctions monotones.

- (i) Si f et g ont le même sens de variation, alors $f \circ g$ est croissante.
- (ii) Si f et g ont des sens de variation opposés, alors $f \circ g$ est décroissante.

De plus, si f ou g sont strictement monotones, alors $f \circ g$ est strictement monotone.

PREUVE.

- (i) Supposons que f et g sont croissantes. Pour $x, x' \in B$ tels que $x \leq x'$, on a $g(x) \leq g(x')$ donc $f(g(x)) \leq f(g(x'))$.
Supposons maintenant que f et g sont décroissantes. Pour $x, x' \in B$ tels que $x \leq x'$, on a $g(x) \geq g(x')$ donc $f(g(x)) \leq f(g(x'))$.
- (ii) Supposons que f est croissante et g est décroissante. Pour $x, x' \in B$ tels que $x \leq x'$, on a $g(x) \geq g(x')$ donc $f(g(x)) \geq f(g(x'))$.
Supposons maintenant que f est décroissante et g est croissante. Pour $x, x' \in B$ tels que $x \leq x'$, on a $g(x) \leq g(x')$ donc $f(g(x)) \geq f(g(x'))$.

Dans le cas où f ou g est strictement monotones, il suffit de remplacer l'une des inégalités larges par une inégalité stricte dans les preuves précédentes. \square

PROPOSITION 1.9. *Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.*

- (i) f est bornée $\iff |f|$ est majorée $\iff |f|$ est bornée.
(ii) Si f et g sont bornées, alors $f + g$, $f - g$ et fg sont aussi bornées.
(iii) Si f est bornée, et $|g|$ admet un minorant $b > 0$, alors f/g est aussi bornée.

PREUVE. (i) f est bornée, alors il existe deux constantes c_1, c_2 telles que $c_1 \leq f \leq c_2$. Alors $-f \leq -c_1$, et donc $|f| \leq \max\{c_2, -c_1\}$, c'est-à-dire $|f|$ est majorée. Si $|f|$ est majorée, alors elle est bornée aussi, parce qu'elle est minorée par 0.

Réciproquement, si $|f|$ est bornée, alors elle est majorée en particulier. Finalement, si $|f|$ est majorée par une constante c , alors $-c \leq f \leq c$, donc f est bornée.

(ii) Si f et g sont bornées, alors $|f|$ et $|g|$ sont majorées par des constantes c, d par (i). On en déduit que

$$|f \pm g| \leq |f| + |g| \leq c + d \quad \text{et} \quad |fg| \leq |f| \cdot |g| \leq cd.$$

En appliquant (i) de nouveau, on conclut que $f + g$, $f - g$ et fg sont bornées.

(iii) Si f est bornée, alors $|f|$ est majorée par une constante c , et $|f/g| \leq c/b$. Comme $|f/g|$ est majorée, f/g est bornée.

(iv) Il faut montrer que si $x, y \in D(f \circ g)$ et $x < y$, alors $f(g(x)) \leq f(g(y))$. Comme g est croissante, on déduit de l'hypothèse $x < y$ que $g(x) \leq g(y)$. Comme f est croissante, on déduit de l'inégalité $g(x) \leq g(y)$ que $f(g(x)) \leq f(g(y))$. \square

2. La fonction exponentielle, le logarithme et les puissances

DÉFINITION (Exponentielle). On définit la fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ par

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

THÉORÈME 2.10. *La fonction exponentielle est strictement croissante et bijective.*

*PREUVE. Nous avons déjà montré la stricte croissance dans le chapitre précédent. D'après Proposition 1.5, il ne reste qu'à montrer la surjectivité de \exp . Fixons $a > 0$ et montrons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(x) = a$. Posons $E_a = \{y \in \mathbb{R} : \exp(y) < a\}$. L'ensemble E_a est non vide, il contient par exemple $y = -\frac{1}{a}$. En effet,

$$\exp\left(\frac{1}{a}\right) \geq 1 + \frac{1}{a} > \frac{1}{a}$$

donc $\exp\left(-\frac{1}{a}\right) < a$. De plus, E_a est majoré (par a). En effet, pour tout $y \in E_a$, on a

$$a > \exp(y) \geq 1 + y > y.$$

Posons $x = \sup E_a$ et montrons que $\exp(x) = a$.

D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y \in E_a$ tel que $x < y + \frac{1}{n}$. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, on en déduit que

$$\exp(x) < \exp\left(y + \frac{1}{n}\right) = \exp(y) \exp\left(\frac{1}{n}\right) < a \exp\left(\frac{1}{n}\right) \leq a \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}$$

et en faisant tendre n vers $+\infty$, que $\exp(x) \leq a$.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x + \frac{1}{n} \notin E_a$ donc $\exp\left(x + \frac{1}{n}\right) \geq a$. On en déduit que

$$\exp(x) \geq a \exp\left(-\frac{1}{n}\right) \geq a \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

et en faisant tendre n vers $+\infty$, que $\exp(x) \geq a$. □

DÉFINITION (Logarithme). On définit la fonction logarithme par $\ln = \exp^{-1}$.

THÉORÈME 2.11. *La fonction $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est bijective et strictement croissante. De plus, elle vérifie les propriétés suivantes :*

(i) Pour tout $x > 0$ et $y > 0$,

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

(ii) Pour tout $x > 0$,

$$\ln x \leq x - 1.$$

PREUVE. La proposition 1.5 nous permet d'affirmer que la fonction \ln est bijective et strictement croissante.

(i) Pour tout $x > 0$ et $y > 0$, on a

$$xy = \exp(\ln x) \exp(\ln y) = \exp(\ln x + \ln y).$$

On en déduit que

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

(ii) Pour tout $x > 0$,

$$x = \exp(\ln x) \geq 1 + \ln x. \quad \square$$

REMARQUES 2.12.

(1) $\exp(0) = 1 \iff \ln(1) = 0$.

(2) Pour tout $x > 0$, Théorème 2.11 (i) donne

$$0 = \ln(1) = \ln\left(x \frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right).$$

On peut en déduire que

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x).$$

(3) Pour tout x_1, x_2, \dots, x_n nombres réels strictement positifs, on a

$$\sum_{k=1}^n \ln(x_k) = \ln\left(\prod_{k=1}^n x_k\right).$$

En effet,

$$(1) \quad \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln(x_k)\right) = \prod_{k=1}^n \exp(\ln(x_k)) = \prod_{k=1}^n x_k.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $a > 0$, si on applique la relation (1) ci-dessus avec $x_1 = \dots = x_n = \ln a$, on obtient

$$\exp(n \ln a) = (\exp(\ln(a)))^n = a^n.$$

De même, grâce à la multiplicativité de l'exponentielle, on a

$$\left(\exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right)\right)^n = \exp\left(n \left(\frac{1}{n} \ln a\right)\right) = \exp(\ln a) = a.$$

Donc

$$\exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right) = a^{\frac{1}{n}}.$$

Le logarithme nous permet de généraliser la notion de puissance d'un nombre strictement positif, ainsi que la racine n ième.

DÉFINITIONS (Puissances). Pour $a > 0$, on définit la fonction puissance pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

REMARQUE 2.13. On définit le nombre $e := \exp(1)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \exp(x \ln(e)) = \exp(x).$$

La définition de l'exponentielle de x coïncide donc avec celle de e puissance x . Dorénavant, nous utiliserons indifféremment les notations e^x et $\exp(x)$.

PROPOSITION 2.14.

- (i) Si $a > 1$, alors la fonction $x \mapsto a^x$ est une bijection croissante de \mathbb{R} sur $]0, +\infty[$.
- (ii) Si $a < 1$, alors la fonction $x \mapsto a^x$ est une bijection décroissante de \mathbb{R} sur $]0, +\infty[$.

(iii) Les identités suivantes ont lieu pour tous $a, b > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1, & a^1 &= a, \\ a^{x+y} &= a^x a^y, & a^{-x} &= 1/a^x, \\ a^x b^x &= (ab)^x, & \ln(a^x) &= x \ln a, \\ (a^x)^y &= a^{xy}. \end{aligned}$$

PREUVE.

Posons $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = x \ln a$. Alors $a^x = (\exp \circ g)(x)$.

- (i) Comme $\ln a > 0$, la fonction g est strictement croissante et bijective. De plus, d'après Théorème 2.10, la fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est strictement croissante et bijective. D'après Proposition 1.8 et Proposition 1.7, la composée $\exp \circ g : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est strictement croissante et bijective.
- (ii) Comme $\ln a < 0$, la fonction g est strictement décroissante et bijective. D'après Proposition 1.8 et Proposition 1.7, la composée $\exp \circ g : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est strictement décroissante et bijective.
- (iii) On a

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= e^{(x+y) \ln a} = e^{x \ln a} e^{y \ln a} = a^x a^y; \\ a^{-x} a^x &= a^{-x+x} = a^0 = e^{0 \cdot \ln a} = e^0 = 1; \\ a^x b^x &= e^{x \ln a} e^{x \ln b} = e^{x(\ln a + \ln b)} = e^{x \ln(ab)} = (ab)^x; \\ \ln a^x &= \ln(\exp(x \ln a)) = \exp^{-1}(\exp(x \ln a)) = x \ln a; \\ (a^x)^y &= e^{y \ln(a^x)} = e^{yx \ln a} = a^{xy}. \end{aligned}$$

□

PROPOSITION 2.15.

- (i) Si $p > 0$, alors la fonction $x \mapsto x^p$ est une bijection croissante de $]0, +\infty[$ sur lui-même.
- (ii) Si $p < 0$, alors la fonction $x \mapsto x^p$ est une bijection décroissante de $]0, +\infty[$ sur lui-même.

Voir Figure 2.

PREUVE. Posons $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = p \ln x$. Alors $x^p = (\exp \circ g)(x)$.

(i) D'après Théorème 2.11, la fonction $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante et bijective et comme $p > 0$, il en est de même de la fonction g . De plus, d'après Théorème 2.10, la fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est strictement croissante et bijective. D'après Proposition 1.8 et Proposition 1.7, la composée $\exp \circ g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante et bijective.

(ii) Comme $p < 0$, la fonction g est strictement décroissante et bijective. D'après Proposition 1.8 et Proposition 1.7, la composée $\exp \circ g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est strictement décroissante et bijective.

□

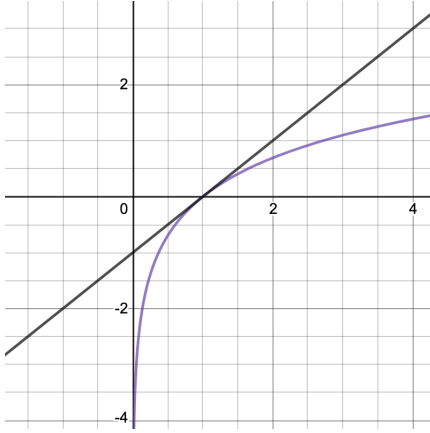


FIGURE 1. $\ln x$ et $x - 1$

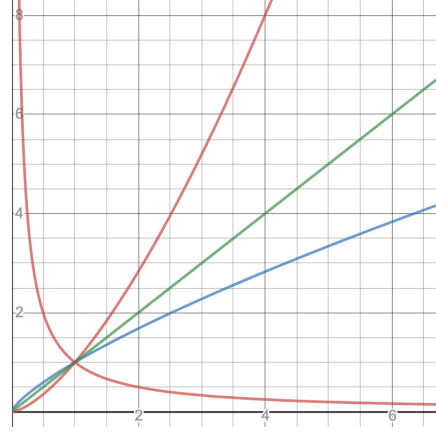


FIGURE 2. $x^{3/2}$, x , $x^{3/4}$ et x^{-1}

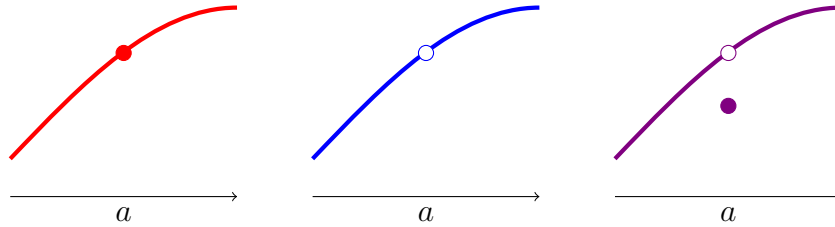


FIGURE 3. Les trois fonctions ont la même limite en a .

3. Limites de fonctions

Pour simplifier les notations, on notera $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

DÉFINITION. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x) \rightarrow \ell$ quand x tend vers a , et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \text{ ou } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$$

si pour toute suite $(a_n) \subset D \setminus \{a\}$ telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, on a $f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

REMARQUES 3.16.

- (i) Pour la définition de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, il n'est pas nécessaire que f soit définie en a . De plus, même si $f(a)$ est défini, l'existence et la valeur de la limite ne dépendent pas de $f(a)$. Voir Figure 3.
- (ii) Si $a \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, alors l'existence et la valeur de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ne dépend pas des valeurs éventuelles de f en dehors de l'intervalle $]a - \delta, a + \delta[$. En effet, si $a_n \rightarrow a$, alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_n \in]a - \delta, a + \delta[$ pour tout $n \geq N$, et la limite de la suite $(f(a_n))$ ne change pas en omettant les premiers $N - 1$ éléments. On dit que la limite est une *propriété locale*.

De manière analogue, si $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ et $M \in \mathbb{R}$, alors l'existence et la valeur de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ne dépend pas des valeurs éventuelles de f l'intervalle $] - \infty, M]$ ou $[M, +\infty[$.

Les propositions 3.1 jusqu'à 4.6 du chapitre 2 donnent directement les propositions 3.21 à 3.30 suivantes.

PROPOSITION 3.17. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \Rightarrow |f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

PROPOSITION 3.18. Soient deux fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$. Alors

- (i) $\alpha f(x) + \beta g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \alpha \ell_1 + \beta \ell_2$.
- (ii) $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1 \ell_2$.

Notation : Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- (i) On écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell^+$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel pour tout $x \in D \cap (]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\setminus \{a\})$, $f(x) \geq \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.
- (ii) On écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell^-$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel pour tout $x \in D \cap (]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\setminus \{a\})$, $f(x) \leq \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

PROPOSITION 3.19. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

- (i) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0^+$.
- (ii) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0^-$.
- (iii) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0^+ \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$.
- (iv) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0^- \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$.

PROPOSITION 3.20.

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{1}{\ell}.$$

PROPOSITION 3.21. Soient deux fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

- (i) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \Rightarrow f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$.
- (ii) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty \Rightarrow f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$.
- (iii) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell > 0$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \Rightarrow f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$.
- (iv) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell < 0$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \Rightarrow f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$.

PROPOSITION 3.22.

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R}$. Alors

- (i) $\forall x \in D, f(x) \geq \alpha \Rightarrow \ell \geq \alpha$.

(ii) $\forall x \in D, f(x) \leq \alpha \Rightarrow \ell \leq \alpha$.

PROPOSITION 3.23.

Soient deux fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell_2$ et que pour tout $x \in D$,

$$f(x) \leq g(x).$$

Alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

PROPOSITION 3.24 (Théorème des gendarmes).

Soient trois fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : D \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Supposons que pour tout $x \in D$,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Si f et g admettent vers une limite commune finie au point a , alors h admet la même limite au point a .

PROPOSITION 3.25.

Soient deux fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Supposons que pour tout $x \in D$,

$$0 \leq f(x) \leq g(x).$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

PROPOSITION 3.26.

Soient deux fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Supposons que pour tout $x \in D$,

$$f(x) \leq g(x).$$

(i) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \Rightarrow g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$.

(ii) $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$.

EXEMPLES 3.27. [Limites des polynômes et fractions rationnelles]

(i) La fonction identité $\text{id}_{\mathbb{R}}$ vérifie, pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \rightarrow a} \text{id}_{\mathbb{R}}(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a$.

(ii) Par multiplication des limites on peut en déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow a} x^k = a^k.$$

(iii) Si $a \in \mathbb{R}^*$, alors, d'après Proposition 3.19

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}.$$

(iv)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0+$$

(v)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0-$$

(vi) Soit un polynôme de degré $p \geq 1$, ($c_p \neq 0$)

$$f(x) = c_p x^p + c_{p-1} x^{p-1} + \dots + c_0 = \sum_{j=0}^p c_j x^j$$

Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, par somme des limites, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, on écrit

$$f(x) = \left(c_p + \frac{c_{p-1}}{x} + \dots + \frac{c_0}{x^p} \right) x^p.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(c_p + \frac{c_{p-1}}{x} + \dots + \frac{c_0}{x^p} \right) = c_p$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p = +\infty$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } c_p > 0, \\ -\infty & \text{si } c_p < 0, \end{cases}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } c_p > 0 \text{ et } m \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } c_p < 0 \text{ et } m \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } c_p > 0 \text{ et } m \text{ est impair,} \\ +\infty & \text{si } c_p < 0 \text{ et } m \text{ est impair.} \end{cases}$$

(vii) Soient deux polynômes de degrés $p, q \geq 1$ ($c_p \neq 0$ et $d_q \neq 0$)

$$f(x) = c_p x^p + c_{p-1} x^{p-1} + \dots + c_0 \quad \text{et} \quad g(x) = d_q x^q + d_{q-1} x^{q-1} + \dots + d_0.$$

Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que $g(a) \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, on écrit

$$\left(\frac{c_p + c_{p-1} x^{-1} + \dots + c_0 x^{-p}}{d_q + d_{q-1} x^{-1} + \dots + d_0 x^{-q}} \right) x^{p-q}$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} c_p/d_q & \text{si } p = q, \\ 0 & \text{si } p < q, \\ +\infty & \text{si } p > q \text{ et } c_p, d_q \text{ sont du même signe,} \\ -\infty & \text{si } p > q \text{ et } c_p, d_q \text{ sont de signes opposés.} \end{cases}$$

Donnons maintenant une variante de la définition de la limite d'une fonction en un point de \mathbb{R} .

DÉFINITION. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

(i) On dit que f admet la *limite à droite* ℓ en a et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell \text{ ou } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell,$$

si pour toute suite $(a_n) \subset D \cap]a, +\infty[$, telle que $a_n \rightarrow a$, on a $f(a_n) \rightarrow \ell$.

(ii) On dit que f admet la *limite à gauche* ℓ en a et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell \text{ ou } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \ell,$$

si pour toute suite $(a_n) \subset D \cap]-\infty, a[$, telle que $a_n \rightarrow a$, on a $f(a_n) \rightarrow \ell$.

PROPOSITION 3.28. *L'équivalence suivante a lieu :*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell.$$

PREUVE.

Preuve de \Rightarrow :

Soit une suite $(a_n) \subset D \cap]a, +\infty[$, telle que $a_n \rightarrow a$. Comme $D \cap]a, +\infty[\subset D \setminus \{a\}$, par définition de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, on a $f(a_n) \rightarrow \ell$. On a montré que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$.

Soit une suite $(a_n) \subset D \cap]-\infty, a[$, telle que $a_n \rightarrow a$. Comme $D \cap]-\infty, a[\subset D \setminus \{a\}$, par définition de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, on a $f(a_n) \rightarrow \ell$. On a montré que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$.

Preuve de \Leftarrow .

Supposons d'abord que $\ell \in \mathbb{R}$. Soit une suite $(a_n) \subset D \setminus \{a\}$ vérifiant $a_n \rightarrow a$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$n \geq N_1 \quad \text{et} \quad a_n > a \Rightarrow |f(a_n) - \ell| < \varepsilon,$$

et

$$n \geq N_2 \quad \text{et} \quad a_n < a \Rightarrow |f(a_n) - \ell| < \varepsilon,$$

Posons $N = \max \{N_1, N_2\}$, alors

$$n \geq N \Rightarrow |f(a_n) - \ell| < \varepsilon.$$

Pour $\ell \in \{-\infty, +\infty\}$, la preuve est analogue : il suffit de fixer $R > 0$ quelconque, et de remplacer la condition $|f(a_n) - \ell| < \varepsilon$ par $a_n > R$ et $a_n < -R$, respectivement. \square

EXEMPLES 3.29. D'après Proposition 3.19, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

En particulier, la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0, ni finie, ni infinie.

REMARQUE 3.30. En fait, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ sont les limites au sens ordinaire des restrictions de f :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f|_{D \cap]-\infty, a[}(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f|_{D \cap]a, +\infty[}(x).$$

PROPOSITION 3.31 (Composées).

Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et soient $a, b, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que

- (i) $f(D \setminus \{a\}) \subset E \setminus \{b\}$,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$,
- (iii) $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell$.

Alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \ell$.

PREUVE.

Soit (a_n) une suite telle que $(a_n) \subset D \setminus \{a\}$ et $a_n \rightarrow a$. On doit montrer que $(g \circ f)(a_n) \rightarrow \ell$. Par définition de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = b$.

Comme $(f(a_n)) \subset E \setminus \{b\}$, par définition de $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(f(a_n)) = \ell$. \square

EXEMPLE 3.32. [Limites de l'exponentielle et du logarithme]

- | | |
|---|--|
| (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty;$ | (5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty;$ |
| (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0;$ | (6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty;$ |
| (3) $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0};$ | (7) $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0, \forall x_0 > 0;$ |
| (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty;$ | (8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty.$ |

PREUVE. Voir Exercice 5.

- (1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x \geq 1 + x$.

Comme $1 + x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, on en déduit que $e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

- (2) En effectuant le changement de variables $y = -x$, et en utilisant la composée et l'inversion de limites, ainsi que (1), on a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^y} = 0^+.$$

- (3) Montrons d'abord que si $\lim_{x \rightarrow 0} e^x \rightarrow 1$. D'après les inégalités que l'on connaît sur l'exponentielle, pour tout $x < 1$, on a

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1 - x}.$$

le principe des gendarmes implique que $e^x \rightarrow 1$.

Soit maintenant $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque, alors d'après ce qui précède $\lim_{x \rightarrow x_0} e^{x-x_0} = 1$ et en appliquant la multiplicativité de l'exponentielle,

$$e^x = e^{x_0} e^{x-x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} e^{x_0}.$$

- (4) Pour tout $x > 0$, on a $e^{\frac{x}{2}} \geq 1 + \frac{x}{2} \geq \frac{x}{2}$. Donc $e^x = (e^{\frac{x}{2}})^2 \geq \frac{x^2}{4}$ et $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{4}$.

Comme $\frac{x}{4} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, on en déduit que $e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

- (5) Utilisons la définition de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. Soit (a_n) une suite telle que $a_n \rightarrow +\infty$.

Pour tout $R > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $a_n > e^R$. Comme la fonction \ln est (strictement) croissante, pour tout $n \geq N$, on a $\ln(a_n) > R$.

On a ainsi montré que $\ln a_n \rightarrow +\infty$.

- (6) En effectuant le changement de variables $y = \frac{1}{x}$, et en utilisant la composée et l'inversion de limites, ainsi que (5), on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{y} \right) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = -\infty.$$

- (7) Montrons d'abord que $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$.

D'après Théorème 2.11, pour tout $x > 0$, on a $\ln x \leq 1 - x$. En appliquant la même inégalité à $\frac{1}{x} > 0$, on a aussi $-\ln x = \ln \left(\frac{1}{x} \right) \leq 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Donc

$$\frac{1-x}{x} \leq \ln x \leq 1-x$$

Par le théorème des gendarmes, on obtient $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$.

Soit maintenant $x_0 > 0$. Alors

$$\ln x = \ln x_0 + \ln x - \ln x_0 = \ln x_0 + \ln \left(\frac{x}{x_0} \right).$$

D'après ce qui précède,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln \left(\frac{x}{x_0} \right) = \lim_{y \rightarrow 1} \ln y = 0.$$

On obtient que $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0$.

(8) On effectue le changement de variables $y = \ln x \iff x = e^y$ et en utilisant (4), on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty.$$

□

EXEMPLE 3.33. [Limites des puissances]

- | | |
|--|--|
| (1) $\forall a > 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty;$ | (4) $\forall p > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^p = +\infty;$ |
| (2) $\forall a > 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0,$ | (5) $\forall p > 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^p = 0^+;$ |
| (3) $\forall a > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0};$ | (6) $\forall p \in \mathbb{R}, \forall x_0 > 0, \lim_{x \rightarrow x_0} x^p = x_0^p.$ |

La notation $x \rightarrow 0^+$ souligne que x^p n'est défini que pour $x > 0$ en général.

PREUVE.

(1) Soit $a > 1$. Alors, comme $\ln a > 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln a) = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln a} = +\infty.$$

(2) Soit $a > 1$. Alors, comme $\ln a > 0$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \ln a) = -\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln a} = 0.$$

(3) Soit $a > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (x \ln a) = x_0 \ln a$ et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{x \ln a} = e^{x_0 \ln a} = a^{x_0}.$$

(4) Soit $p > 0$. Alors, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (p \ln x) = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{p \ln x} = +\infty.$$

(5) Soit $p > 0$. Alors, comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} (p \ln x) = -\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{p \ln x} = 0.$$

(6) Soit $p \in \mathbb{R}$ et $x_0 > 0$. Alors, $\lim_{x \rightarrow x_0} (p \ln x) = p \ln(x_0)$ et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^p = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{p \ln x} = e^{p \ln(x_0)} = x_0^p.$$

□

PROPOSITION 3.34 (Croissances comparées).
Les trois propriétés suivantes sont vérifiées.

- (i) $\forall p \in \mathbb{R}$ et $\forall q > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{qx}}{x^p} = +\infty$.
- (ii) $\forall p \in \mathbb{R}$ et $\forall q > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^q}{(\ln x)^p} = +\infty$.
- (iii) $\forall a > 1$, $\forall p \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$.

PREUVE.

(i) Si $p = 0$, alors $\frac{e^{qx}}{x^p} = e^{qx} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Si $p < 0$, alors $e^{qx} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\frac{1}{x^p} = x^{-p} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\frac{e^{qx}}{x^p} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Si $p > 0$. Alors pour tout $x > 0$,

$$\frac{e^{qx}}{x^p} = \left(\frac{e^{\frac{qx}{p}}}{\frac{qx}{p}} \right)^p \left(\frac{q}{p} \right)^p.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{qx}{p}}}{\frac{qx}{p}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty,$$

d'après les exemples 3.32(4). Et d'après les exemples 3.33(4), on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{\frac{qx}{p}}}{\frac{qx}{p}} \right)^p = +\infty.$$

que $\frac{e^{qx}}{x^p} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Finalement, comme $\left(\frac{q}{p} \right)^p > 0$, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{qx}}{x^p} = +\infty.$$

(ii) Pour $x > 0$, on pose $y = \ln x$. Alors

$$\frac{x^q}{(\ln x)^p} = \frac{e^{q \ln x}}{(\ln x)^p} = \frac{e^{qy}}{y^p}.$$

D'après (i), on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^q}{(\ln x)^p} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{qy}}{y^p} = +\infty.$$

(iii) En appliquant (i) avec $q = \ln a > 1$, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^p} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln a}}{x^p} = +\infty.$$

□

EXEMPLE 3.35 (Fonctions trigonométriques).

Nous admettrons pour l'instant le lemme et la proposition suivants (voir l'annexe au chapitre 3 pour plus de détails sur les fonctions trigonométriques).

LEMME 3.36. Si $0 < h < \pi/2$, alors

$$0 < \sin h < h < \tan h.$$

PROPOSITION 3.37. Les identités suivantes ont lieu, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sin x - \sin y &= 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \\ \cos x &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)\end{aligned}$$

REMARQUE 3.38. On peut déduire du Lemme 3.37 la relation suivante, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1 - \cos x = 2 \left(\sin \left(\frac{x}{2} \right) \right)^2.$$

En effet,

$$1 - \cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi - x}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{x}{2} \right).$$

PROPOSITION 3.39. Les inégalités suivantes ont lieu pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

- (i) Pour tout $h \in \mathbb{R}$, $|\sin h| \leq |h|$.
- (ii) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.
- (iii) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$.

PREUVE. (i) Soit $h \in \mathbb{R}$. Quitte à remplacer h par $-h$, on peut supposer $h \geq 0$.

Si $0 < h < \frac{\pi}{2}$, alors l'inégalité découle directement du Lemme 3.36.

Si $h \geq \frac{\pi}{2}$, on a

$$|\sin h| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq h = |h|$$

(ii) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. D'après Proposition 3.37,

$$|\sin x - \sin y| = \left| 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| = |x-y|.$$

(iii) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. D'après Proposition 3.37 et (ii) ci-dessus,

$$|\cos x - \cos y| = \left| \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} - y \right) \right| \leq \left| \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - \left(\frac{\pi}{2} - y \right) \right| = |x - y|.$$

□

PROPOSITION 3.40.

- (i) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$ et $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

PREUVE.

(i) D'après Proposition 3.39, si $x \rightarrow a$, on a

$$|\sin x - \sin a| \leq |x - a| \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad |\cos x - \cos a| \leq |x - a| \rightarrow 0,$$

donc $\sin x \rightarrow \sin a$ et $\cos x \rightarrow \cos a$.

(ii) Il suffit de montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on a, d'après Lemme 3.36,

$$0 < \sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

et donc

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$, il suffit d'appliquer le théorème des

gendarmes pour conclure que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Pour la limite à gauche, remarquons que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

(iii) En utilisant la relation démontrée dans Remarque 3.38, et (ii) ci-dessus, on obtient

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2}{x^2} \left(\sin \left(\frac{x}{2} \right) \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\frac{x}{2}} \right)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$$

□

Afin de simplifier les écritures, on étend désormais les notions de sup et de inf au cas des ensembles qui ne sont pas bornés en posant $\sup E = +\infty$ si E n'est pas majoré et $\inf E = -\infty$ si E n'est pas minoré,

PROPOSITION 3.41. *Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante. Alors*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \inf f(]a, b[) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow b} f(x) = \sup f(]a, b[).$$

Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction décroissante. Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sup f(]a, b[) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow b} f(x) = \inf f(]a, b[).$$

PREUVE.

Supposons que f est croissante.

Cas où $f(]a, b[)$ est borné.

Posons $S = \sup f(]a, b[)$ et montrons alors que $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = S$. Soit une suite $(x_n) \subset]a, b[$ telle que $x_n \rightarrow b$. On veut montrer que $f(x_n) \rightarrow S$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition du sup, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) > S - \varepsilon$.

Comme $x_n \rightarrow b$ et $b - c > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$b - x_n = |b - x_n| < b - c \Rightarrow x_n > c.$$

Pour tout $n \geq N$, par croissance de f , on a alors

$$S \geq f(x_n) \geq f(c) > S - \varepsilon \Rightarrow |f(x_n) - S| = S - f(x_n) < \varepsilon.$$

On a bien montré que $f(x_n) \rightarrow S$.

Posons maintenant $I = \inf f(]a, b[)$ et montrons alors que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = I$.
Soit une suite $(x_n) \subset]a, b[$ telle que $x_n \rightarrow a$. On veut montrer que $f(x_n) \rightarrow I$. Soit $\varepsilon > 0$.
Par définition de l'inf, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) < I + \varepsilon$.

Comme $x_n \rightarrow a$ et $c - a > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$x_n - a = |x_n - a| < c - a \Rightarrow x_n < c.$$

Pour tout $n \geq N$, par croissance de f , on a alors

$$f(x_n) \leq f(c) < I + \varepsilon \Rightarrow |f(x_n) - I| = f(x_n) - I < \varepsilon.$$

On a bien montré que $f(x_n) \rightarrow I$.

Cas où $S = +\infty$.

Montrons alors que $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$.

Soit une suite $(x_n) \subset]a, b[$ telle que $x_n \rightarrow b$. On veut montrer que $f(x_n) \rightarrow +\infty$.

Soit $R > 0$. Comme $f(]a, b[)$ n'est pas majoré, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) > R$.

Comme $x_n \rightarrow b$ et $b - c > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$b - x_n = |b - x_n| < b - c \Rightarrow x_n > c.$$

Pour tout $n \geq N$, par croissance de f , on a alors

$$f(x_n) \geq f(c) > R.$$

On a bien montré que $f(x_n) \rightarrow +\infty$.

Cas où $I = -\infty$.

Montrons alors que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$.

Soit une suite $(x_n) \subset]a, b[$ telle que $x_n \rightarrow a$. On veut montrer que $f(x_n) \rightarrow -\infty$.

Soit $R > 0$. Comme $f(]a, b[)$ n'est pas minoré, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) < -R$.

Comme $x_n \rightarrow a$ et $c - a > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$x_n - a = |x_n - a| < c - a \Rightarrow x_n < c.$$

Pour tout $n \geq N$, par croissance de f , on a alors

$$f(x_n) \leq f(c) < -R.$$

On a bien montré que $f(x_n) \rightarrow -\infty$.

Supposons maintenant que f est décroissante. Alors $-f$ est croissante. D'après le cas précédent,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = - \lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = - \inf(-f(]a, b[)) = \sup f(]a, b[)$$

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = - \lim_{x \rightarrow b} (-f(x)) = - \sup(-f(]a, b[)) = \inf f(]a, b[)$$

□

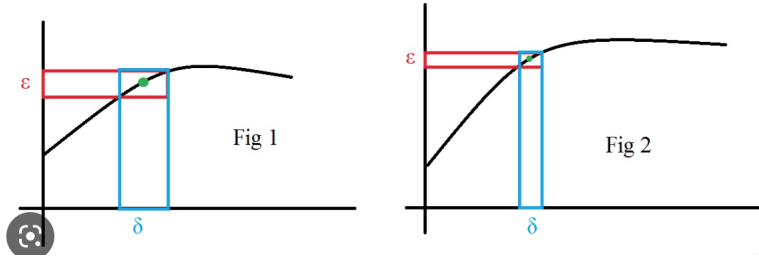


FIGURE 4. Illustration de la proposition 3.44

EXEMPLES 3.42. Comme $\exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$ et $\ln(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, on retrouve les limites

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x &= +\infty. \end{aligned}$$

Terminons cette section par la définition originale de Cauchy de la limite dans le cas particulier où a et ℓ sont finis :

PROPOSITION 3.43. *Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a, A \in \mathbb{R}$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$;
 (b) $\forall \varepsilon > 0$ fixé, il existe $\delta > 0$ tel que

$$x \in D \text{ et } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

PREUVE.

(a) \Rightarrow (b) Procédons par contraposée. Si la condition (b) n'est pas satisfaite, alors il existe $\varepsilon > 0$ pour lequel aucun $\delta > 0$ ne convient. En particulier, les choix $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ ne conviennent pas. Il existe donc une suite $(x_n) \subset D$ telle que

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - A| \geq \varepsilon$$

pour tout n . Alors $(x_n) \subset D \setminus \{a\}$, $x_n \rightarrow a$, et $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$, d'où $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq A$, donc la condition (a) n'est pas satisfaite non plus.

(b) \Rightarrow (a) Soit $(a_n) \subset D \setminus \{a\}$ et $a_n \rightarrow a$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé quelconque. On veut montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \Rightarrow |f(a_n) - A| < \varepsilon.$$

Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que

$$x \in D \text{ et } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Et il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n \geq N \Rightarrow 0 < |a_n - a| < \delta.$$

On a alors

$$n \geq N \Rightarrow 0 < |a_n - a| < \delta \Rightarrow |f(a_n) - A| < \varepsilon.$$

On a ainsi montré que $\lim f(a_n) = A$. □

On peut généraliser cette proposition aux cas où a ou A n'est pas fini. Les preuves sont similaires à celle de la proposition précédente.

PROPOSITION 3.44. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Alors

(a) Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \iff \forall P > 0, \exists \delta > 0 : x \in D \text{ et } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > P.$$

(b) Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \iff \forall P < 0, \exists \delta > 0 : x \in D \text{ et } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < P.$$

(c) Soit $A \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 > 0 : x \in D \text{ et } x > x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

(d) Soit $A \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 < 0 : x \in D \text{ et } x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

(e)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall P > 0, \exists x_0 > 0 : x \in D \text{ et } x > x_0 \Rightarrow f(x) > P.$$

(f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall P < 0, \exists x_0 > 0 : x \in D \text{ et } x > x_0 \Rightarrow f(x) < P.$$

(g)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall P > 0, \exists x_0 < 0 : x \in D \text{ et } x < x_0 \Rightarrow f(x) > P.$$

(h)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall P < 0, \exists x_0 < 0 : x \in D \text{ et } x < x_0 \Rightarrow f(x) < P.$$

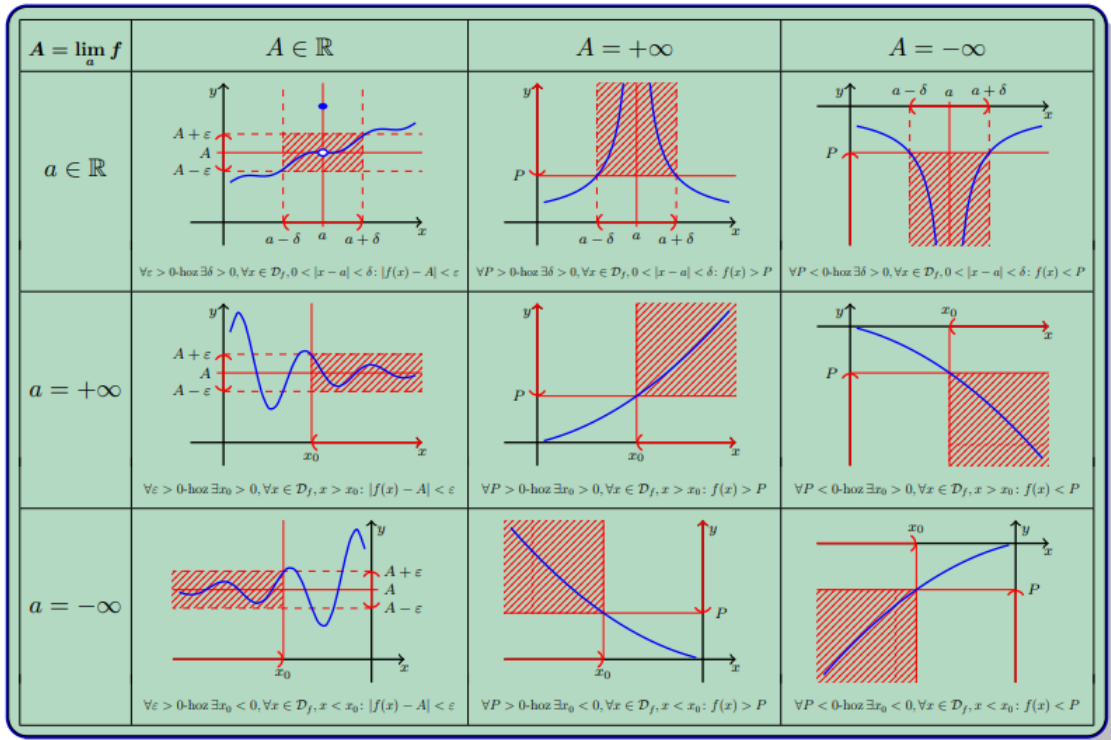


FIGURE 5. Neuf cas de limites