CHAPITRE I : INTEGRALES DE RIEMANN SUR UN INTERVALLE $[a, b]$

Dans tout ce chapitre, $a$ et $b$ désigneront deux nombres réels tels que $a < b$.

## 1. Intégrales de fonctions en escaliers

Définition 1.1 (Subdivision).

On appelle subdivision d'un intervalle $[a, b]$ une suite finie de points $\sigma = \{\alpha_j\}_{j=0,\dots,n}$ telle que

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = b.$$

Une subdivision $\sigma'$ est dite plus fine que $\sigma$ si $\sigma \subset \sigma'$.

Définition 1.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle subdivision régulière de $[a, b]$ toute subdivision $\sigma = \{\alpha_j\}_{j=0,\dots,n}$ telle que

$$\alpha_j = a + j\frac{b-a}{n}, \;\; j = 0, \dots, n.$$

Dans ce cas, on a $\alpha_j - \alpha_{j-1} = \frac{b-a}{n}, \;\; j = 1, \dots, n.$

Définition 1.3 (Fonction en escalier).

On dit que $f \;:\; [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = \{\alpha_j\}_{j=0,\dots,n}$ de $[a, b]$ et des constantes $c_1, \dots c_n$ telles que

(1) $\qquad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \; \forall x \in ]\alpha_{j-1}, \alpha_j[, \;\; f(x) = c_j.$

Soit $f$ est une fonction en escalier. On dit que $\sigma = \{\alpha_j\}_{j=0,\dots,n}$ est une subdivision adaptée à $f$ si celle-ci est constante sur chaque intervalle $]\alpha_{j-1}, \alpha_j[$.

Les valeurs de $f(\alpha_j)$ n'ont pas d'importance.

Remarque 1.4. Toute subdivision plus fine qu'une subdivision adaptée à $f$ est encore adaptée à $f$.

PROPOSITION 1.5. *L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$, qu'on notera $\mathcal{E}([a, b])$, est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION. Soient $f, g \in \mathcal{E}([a, b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe alors une subdivision $\sigma$ adaptée à $f$ et une une subdivision $\sigma'$ adaptée à $g$. En réunissant les deux, $\sigma \cup \sigma' = \{\alpha_j\}_{j=1,\dots,n}$ est adaptée à la fois à $f$ et à $g$. Il existe alors des constantes $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n$ telles que :

$$\forall x \in ]\alpha_{j-1}, \alpha_j[, \;\; f(x) = c_j, \;\; g(x) = d_j$$

et donc $(\lambda f + g)(x) = \lambda f(x) + g(x) = \lambda c_j + d_j$.
Autrement dit, $\lambda f + g \in \mathcal{E}([a,b])$. ∎

Définition 1.6 (Intégrale d'une fonction en escalier).
Soit $f$
$in\mathcal{E}([a,b])$, $\sigma = \{\alpha_j\}_{j=0,\ldots,n}$ une subdivision adaptée à $f$ et $c_1, \ldots, c_n$ des constantes vérifiant (1). On appelle intégrale de $f$ sur $[a,b]$ le nombre

$$\int_a^b f(x)dx := \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \alpha_{j-1}) c_j.$$

PROPOSITION 1.7.
*Le nombre* $\int_a^b f(x)dx$ *ne dépend pas de la subdivision adaptée à* $f$.

DÉMONSTRATION.
Considérons deux subdivisions adaptées à $f$ : $\sigma = \{\alpha_j\}_{j=0,\ldots,n}$ et $\sigma' = \{\beta_k\}_{k=0,\ldots,m}$. Il existe donc des constantes $c_1, \ldots c_n, d_1, \ldots, d_m$ telle que, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ et pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, on a :

$$\forall x \in ]\alpha_{j-1}, \alpha_j[, \;\; f(x) = c_j, \forall x \in ]\beta_{k-1}, \beta_k[, \;\; f(x) = d_k.$$

Quitte à remplacer $\sigma'$ par $\sigma \cup \sigma'$, on peut supposer que $\sigma'$ est plus fine que $\sigma$. On a alors la situation suivante : pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$]\alpha_{j-1}, \alpha_j[ = ]\beta_{k_0^j}, \beta_{k_1^j}] \cup [\beta_{k_1^j}, \beta_{k_2^j}[ \cup \ldots \cup [\beta_{k_{l_j-1}^j}, \beta_{k_{l_j}^j}[,$$

$$\{\beta_0, \ldots, \beta_m\} = \{\beta_{k_0^1}, \ldots, \beta_{k_{l_1}^1}\} \cup \{\beta_{k_0^2}, \ldots \beta_{k_{l_2}^2}\} \cup \ldots \cup \{\beta_{k_0^n}, \ldots, \beta_{k_{l_n}^n}\},$$

$$\forall l \in \{1, \ldots, l_j\}, \; d_{k_l}^j = c_j.$$

On en déduit :

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \alpha_{j-1}) c_j = \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{l=1}^{l_j} (\beta_{k_l^j} - \beta_{k_{l-1}^j}) \right) c_j = \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{l=1}^{l_j} (\beta_{k_l^j} - \beta_{k_{l-1}^j}) d_{k_l^j} \right) = \sum_{k=1}^{m} (\beta_j - \beta_{j-1}) d_j.$$

∎

PROPOSITION 1.8 (Positivité). *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction en escalier telle que*

$$\forall x \in [a,b], \; f(x) \geq 0.$$

*Alors*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

DÉMONSTRATION.

Soit $\sigma = \{\alpha_j\}_{j=0,\dots,n}$ une subdivision de $[a,b]$ et des constantes $c_1,\dots c_n$ vérifiant (1). Comme pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, $c_j \geq 0$ et $\alpha_j - \alpha_{j-1} \geq 0$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \alpha_{j-1}) c_j \geq 0.$$

■

PROPOSITION 1.9 (Inégalité triangulaire). *Soit $f \in \mathcal{E}([a,b])$. Alors $|f|$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$ et on a :*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

DÉMONSTRATION.

Soit $\sigma = \{\alpha_j\}_{j=0,\dots,n}$ une subdivision de de $[a,b]$ et des constantes $c_1,\dots c_n$ telles que

$$\forall x \in ]\alpha_{j-1}, \alpha_j[, \quad f(x) = c_j.$$

Alors

$$\forall x \in ]\alpha_{j-1}, \alpha_j[, \quad |f(x)| = |c_j|.$$

On a alors :

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \alpha_{j-1}) c_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |(\alpha_j - \alpha_{j-1}) c_j| = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \alpha_{j-1}) |c_j| = \int_a^b |f(x)|dx.$$

■

PROPOSITION 1.10 (Linéarité).

*Soient $f$ et $g$ deux fonctions en escalier sur un intervalle $[a,b]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + g$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$. De plus, on a :*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

DÉMONSTRATION.

Soit $\sigma$ (resp. $\sigma'$) une subdivision adaptée à $f$ (resp. à $g$). Alors $\sigma \cup \sigma' = \{\alpha_j\}_{j=1,\dots,n}$ est adaptée à la fois à $f$ et à $g$. Il existe alors des constantes $c_1,\dots,c_n, d_1,\dots,d_n$ telles que :

$$\forall x \in ]\alpha_{j-1}, \alpha_j[, \quad f(x) = c_j, \quad g(x) = d_j.$$

On a alors :

$$\forall x \in ]\alpha_{j-1}, \alpha_j[, \quad \lambda f(x) + g(x) = \lambda c_j + d_j.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)+g(x))dx &= \sum_{j=1}^n (\alpha_j-\alpha_{j-1})(c_j+d_j)\\ &= \sum_{j=1}^n (\alpha_j-\alpha_{j-1})c_j + \sum_{j=1}^n (\alpha_j-\alpha_{j-1})d_j\\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.\end{aligned}$$

■

PROPOSITION 1.11 (Croissance).
*Soit $f$ et $g$ deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que*

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq g(x).$$

*Alors*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

DÉMONSTRATION. D'après la linéarité (Proposition 1.10) et la positivité (Proposition 1.8),

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx \geq 0.$$

■

PROPOSITION 1.12 (Relation de Chasles).
*Soit $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier et soit $d \in ]a,b[$. Alors $f$ est en escalier sur $[a,d]$ et sur $[d,b]$ et on a*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx.$$

DÉMONSTRATION.
On considère une subdivision $\sigma = \{\alpha_j\}_{j=0,\ldots,n}$ adaptée à $f$ sur $[a,b]$. Il existe alors des constantes $c_1,\ldots,c_n$ telles que

$$\forall j \in \{1,\ldots,n\},\ \forall x \in ]\alpha_{j-1},\alpha_j[,\ \ f(x) = c_j.$$

Soit $k$ l'indice tel que $d \in ]\alpha_{k-1}, \alpha_k]$. Alors $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}, d\}$ est une subdivision de $[a, d]$ et $\{d, \alpha_{k+1}, , \dots, \alpha_n\}$ est une subdivision de $[d, b]$. On a

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \alpha_{j-1})c_j \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} (\alpha_j - \alpha_{j-1})c_j + (\alpha_k - \alpha_{k-1})c_k + \sum_{j=k+1}^{n} (\alpha_j - \alpha_{j-1})c_j \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} (\alpha_j - \alpha_{j-1})c_j + (d - \alpha_{k-1})c_k + (\alpha_k - d)c_k + \sum_{j=k+1}^{n} (\alpha_j - \alpha_{j-1})c_j \\
&= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.
\end{aligned}$$

■

## 2. Intégrales de fonctions continues sur $[a, b]$

Dans toute cette section, on considèrera une fonction $f$ continue sur $[a, b]$ et des subdivisions régulières, c'est à dire de la forme :

$$\alpha_j = a + \frac{j}{n}(b - a), \ j \in \{0, \dots, n\}.$$

Définition 2.1 (Approximation d'ordre $n$). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $e_n(f)$ sur $[a, b]$ par :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \ \forall x \in ]\alpha_{j-1}, \alpha_j], \ e_n(f)(x) = f(\alpha_j); e_n(f)(a) = f(a).$$

La fonction $e_n(f)$ sera appelée approximation de $f$ d'ordre $n$. Cette fonction est clairement en escalier et la subdivision $\{a + \frac{j}{n}(b - a)\}_{j=0,\dots,n}$ est adaptée à $e_n(f)$.

Définition 2.2 (Somme de Riemann d'ordre $n$). On pose

$$S_n(f) = \int_a^b e_n(f)(x)dx = \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{b-a}{n} f(\alpha_j) \right) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(a + j\frac{b-a}{n}).$$

$S_n(f)$ est appelée somme de Riemann de $f$ d'ordre $n$.

Définition 2.3 (Convergence uniforme). On considère des fonctions $g_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et une fonction $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$. On dit que la suite de fonctions $(g_n)_n$ converge uniformément vers $g$ sur $[a, b]$ si

$$\sup_{t \in [a,b]} |g_n(t) - g(t)| \to_{n \to +\infty} 0.$$

PROPOSITION 2.4.
*Si une suite de fonctions en escalier $(f_n)_n$ converge uniformément vers $0$ sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b f_n(x)dx \to_{n\to+\infty} 0.$$

DÉMONSTRATION.
D'après Proposition 1.9 et 1.11, on a

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x)|dx \leq \int_a^b \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t)|dx = (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t)| \to_{n\to+\infty} 0.$$

■

On rappelle le théorème suivant :

THÉORÈME 2.5. *On a*

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - e_n(f)(x)| \to_{n\to+\infty} 0.$$

*Autrement dit, la suite de fonctions en escaliers $(e_n(f))_n$ converge uniformément vers $f$ sur $[a,b]$.*

DÉMONSTRATION.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f$ est continue sur $[a,b]$, d'après le théorème de Heine, elle est est uniformément continue sur $[a,b]$. C'est à dire qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$|y - z| < \eta \Longrightarrow |f(y) - f(z)| < \varepsilon.$$

Fixons $N > \frac{b-a}{\eta}$ et considérons $n \geq N$.
On fixe $x \in [a,b]$. Si $x = a$, $|f(a) - e_n(f)(a)| = 0$. Si $x \in ]a,b]$, il existe $j \in \{1,\dots,n\}$ tel que $x \in ]\alpha_{j-1},\alpha_j]$. On a alors $e_n(f)(x) = f(\alpha_j)$ et $|x - \alpha_j| = \alpha_j - x \leq \alpha_j - \alpha_{j-1} = \frac{b-a}{n} \leq \frac{b-a}{N} < \eta$. On en déduit que

$$|f(x) - e_n(f)(x)| = |f(x) - f(\alpha_j)| < \varepsilon.$$

Nous venons de montrer que $\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - e_n(f)(x)| < \varepsilon$. Ceci termine la démonstration. ■

Définition 2.6 (Suite de Cauchy). On dit qu'une suite réelle $(u_n)_n$ est de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p > q \geq N$, $|u_p - u_q| < \varepsilon$.

PROPOSITION 2.7. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

DÉMONSTRATION. Supposons que la suite $(u_n)_n$ est convergente et notons $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_p - l| < \varepsilon/2$. Alors pour tout $p > q \geq N$, on a

$$|u_p - u_q| = |u_p - l + l - u_q| \leq |u_p - l| + |l - u_q| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

■

On admettra pour le moment le théorème suivant :

THÉORÈME 2.8. *Toute suite rélle de Cauchy est convergente*

THÉORÈME 2.9.
*La suite $(S_n(f))_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Elle est donc convergente.*

DÉMONSTRATION.
D'après Théorème 2.5, la suite de fonctions $(e_n(f))_n$ converge uniformément vers $f$ sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a

$$\sup_{x\in[a,b]} |e_p(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Prenons alors $p > q \geq N$. D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\sup_{x\in[a,b]} |e_p(x) - e_q(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |e_p(x) - f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |e_q(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)}.$$

Autrement dit, la suite de fonctions $(e_n(f))_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme. Nous reverrons cette notion dans le cours sur les suites de fonctions.

$$\begin{aligned}
|S_p(f)-S_q(f)| &= \left|\frac{b-a}{p}\sum_{j=1}^{p} f(a+j\frac{b-a}{p}) - \frac{b-a}{q}\sum_{j=1}^{q} f(a+j\frac{b-a}{q})\right| \\
&= \left|\frac{b-a}{pq}\sum_{j=1}^{p} qf(a+j\frac{b-a}{p}) - \frac{b-a}{pq}\sum_{j=1}^{q} pf(a+j\frac{b-a}{q})\right| \\
&= \left|\frac{b-a}{pq}\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=q(j-1)+1}^{qj} e_p(a+l\frac{b-a}{pq}) - \frac{b-a}{pq}\sum_{j=1}^{q}\sum_{l=p(j-1)+1}^{pj} e_q(a+l\frac{b-a}{pq})\right| \\
&= \left|\frac{b-a}{pq}\sum_{l=1}^{pq} e_p(a+l\frac{b-a}{pq}) - \frac{b-a}{pq}\sum_{l=1}^{pq} e_q(a+j\frac{b-a}{pq})\right| \\
&= \frac{b-a}{pq}\left|\sum_{l=1}^{pq}\left(e_p(a+l\frac{b-a}{pq}) - e_q(a+l\frac{b-a}{pq})\right)\right| \\
&\leq \frac{b-a}{pq}\sum_{l=1}^{pq}\left|e_p(a+j\frac{b-a}{pq}) - e_q(a+j\frac{b-a}{pq})\right| \\
&\leq \frac{b-a}{pq}\sum_{l=1}^{pq}\sup_{x\in[a,b]}|e_p(x)-e_q(x)| = (b-a)\sup_{x\in[a,b]}|e_p(x)-e_q(x)| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

Définition 2.10.
On appellera intégrale de $f$ sur $[a,b]$ le nombre

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b e_n(f)(x)dx.$$

PROPOSITION 2.11.
*Soit $(g_n)_n$ une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers $f$ sur $[a,b]$. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b g_n(x)dx.$$

*Autrement dit, l'intégrale de $f$ ne dépend pas la manière dont on approche uniformément $f$ par des fonctions en escalier.*

DÉMONSTRATION.
Comme les deux suites de fonctions $(g_n)_n$ et $(e_n(f))_n$ convergent toutes les deux uniformément vers $f$ sur $[a,b]$, la différence $g_n - e_n(f)$ converge uniformément vers $0$ sur $[a,b]$. D'après les

propriétés des intégrales de fonctions en escalier, on a :

$$\int_a^b g_n(x)dx - \int_a^b e_n(f)(x)dx = \int_a^b (g_n(x) - e_n(f)(x))\, dx \to_{n\to+\infty} 0.$$

Autrement dit, $\int_a^b g_n(x)dx$ converge vers la même limite que $\int_a^b e_n(f)(x)dx$. ■

Définition 2.12.
On pose :

$$\int_a^a f(x)dx = 0; \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

PROPOSITION 2.13 (Positivité).
*Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que*

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0.$$

*Alors*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

DÉMONSTRATION.
Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [a,b]$, $e_n(f)(x) \geq 0$ et d'après Proposition 1.8, on a :

$$\int_a^b e_n(f)(x)dx \geq 0.$$

On conclut par passage à la limite. ■

PROPOSITION 2.14 (Linéarité).
*Soient* $f$ *et* $g$ *deux fonctions continues sur un intervalle* $[a,b]$. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors on a*

$$\int_a^b \lambda f(x) + g(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

DÉMONSTRATION. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [a,b]$, $e_n(\lambda f + g)(x) = \lambda e_n(f)(x) + e_n(g)(x)$ et d'après Proposition 1.10, on a :

$$\int_a^b e_n(\lambda f+g)(x)dx = \int_a^b (\lambda e_n(f)(x) + e_n(g)(x))\, dx = \lambda \int_a^b e_n(f)(x)dx + \int_a^b e_n(g)(x)dx.$$

On conclut par passage à la limite. ■

PROPOSITION 2.15 (Croissance). *Soit* $f$ *et* $g$ *deux fonctions continues sur* $[a,b]$ *telles que*

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq g(x).$$

*Alors*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

DÉMONSTRATION. D'après la linéarité (Proposition 2.14) et la positivité (Proposition 2.13),

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx \geq 0.$$

■

PROPOSITION 2.16 (Inégalité triangulaire).
*Soit* $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors* $|f|$ *est une fonction continue sur* $[a,b]$ *et on a*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

DÉMONSTRATION.
Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [a,b]$, $e_n(|f|)(x) = |e_n(f)(x)|$ et d'après Proposition 1.9, on a :

$$\left|\int_a^b e_n(f)(x)dx\right| \leq \int_a^b |e_n(f)(x)| = \int_a^b e_n(|f|)(x)|.$$

On conclut par passage à la limite et en observant que :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\lim_{n\to+\infty} \int_a^b e_n(f)(x)dx\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\int_a^b e_n(f)(x)dx\right|.$$

■

PROPOSITION 2.17 (Relation de Chasles).
*Soit* $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $c \in [a,b]$*. Alors on a*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

DÉMONSTRATION.
D'après Proposition 1.12, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$\int_a^b e_n(f)(x)dx = \int_a^c e_n(f)(x)dx + \int_c^b e_n(f)(x)dx.$$

On conclut par passage à la limite. ■

PROPOSITION 2.18. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive telle que*

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

*Alors*

$$\forall x \in [a, b], \ f(x) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Procédons par contraposée et supposons qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) > 0$ (on peut supposer que $c \in ]a, b[$). Alors, par continuité de $f$, il existe $\varepsilon > 0$ et $d \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon] \subset [a, b]$ tel que :

$$\forall x \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon], \ \ f(x) \geq f(d) > 0.$$

En utilisant les propositions 2.17, 2.13 puis 2.15, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \\ &\geq \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)dx \geq \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(d)dx = 2\varepsilon f(d) > 0. \end{aligned}$$

■

THÉORÈME 2.19 (Théorème fondamental du calcul différentiel). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction $F$ définie sur $[a, b]$ par :*

$$\forall x \in [a, b], \ F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

*vérifie :*

- *$F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$,*
- *$\forall x \in [a, b], \ F'(x) = f(x)$ (c'est-à-dire que $F$ est une primitive de $f$),*
- *$F$ est la seule primitive de $f$ qui s'annule en $a$.*

DÉMONSTRATION. Soit $c \in ]a, b[$ et $\varepsilon > 0$. Par continuité de $f$ au point $c$, il existe $\eta > 0$ tel que $]c-\eta, c+\eta[ \subset ]a, b[$ et tel que pour tout $t \in ]c-\eta, c+\eta[$, $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$. Soit $x \in ]c-\eta, c+\eta[$. D'après la relation de Chasles, on a :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt = F(c) + \int_c^x f(t)dt,$$

donc

$$F(x) - F(c) = \int_c^x f(t)dt$$

$$\begin{aligned}
|F(x)-F(c)-(x-c)f(c)| &= \left|\int_c^x f(t)dt-(x-c)f(c)\right| \\
&= \left|\int_c^x (f(t)-f(c))\,dt\right| \\
&\leq \left|\int_c^x |f(t)-f(c)|\,dt\right| \\
&\leq |c-x|\varepsilon.
\end{aligned}$$

En supposant $x \neq c$, on obtient :

$$\left|\frac{F(x)-F(c)}{x-c}-f(c)\right| < \varepsilon.$$

On a montré que

$$\frac{F(x)-F(c)}{x-c} \to_{x\to c}= f(c),$$

autrement dit que $F$ est dérivable au point $c$ et que $F'(c)=f(c)$.

Par continuité de $f$ au point $a$, il existe $\eta>0$ tel que $[a,a+\eta[\subset [a,b[$ et tel que pour tout $t\in[a,a+\eta[$, $|f(t)-f(a)|<\varepsilon$. Soit $x\in[a,a+\eta[$. On a :

$$\begin{aligned}
|F(x)-F(a)-(x-a)f(a)| &= \left|\int_a^x f(t)dt-(x-a)f(a)\right| \\
&= \left|\int_a^x (f(t)-f(a))\,dt\right| \\
&\leq \int_a^x |f(t)-f(a)|\,dt \\
&\leq |a-x|\varepsilon.
\end{aligned}$$

En supposant $x \neq a$, on obtient :

$$\left|\frac{F(x)-F(a)}{x-a}-f(a)\right| < \varepsilon.$$

On a montré que

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a} \to_{x\to a^+}= f(a),$$

autrement dit que $F$ est dérivable à droite de $a$ et que cette dérivée à droite vaut $f(a)$.

Par continuité de $f$ au point $b$, il existe $\eta>0$ tel que $]b-\eta,b]\subset]a,b]$ et tel que pour tout $t\in]b-\eta,b]$, $|f(t)-f(b)|<\varepsilon$.

Soit $x \in ]b-\eta, b]$. On a :

$$\begin{aligned} |F(x) - F(b) - (x-b)f(b)| &= \left| \int_b^x f(t)dt - (x-b)f(b) \right| \\ &= \left| \int_b^x (f(t) - f(b))\, dt \right| \\ &\leq \int_x^b |f(t) - f(b)|\, dt \\ &\leq |b - x|\varepsilon. \end{aligned}$$

En supposant $x \neq b$, on obtient :

$$\left| \frac{F(x) - F(b)}{x - b} - f(b) \right| < \varepsilon.$$

On a montré que

$$\frac{F(x) - F(b)}{x - b} \to_{x \to b^-} = f(b),$$

autrement dit que $F$ est dérivable à gauche de $b$ et que cette dérivée à gauche vaut $f(b)$.

Finalement, $F$ est dérivable sur $[a, b]$ et $F' = f$. Comme $f$ est continue sur $[a, b]$, $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

Supposons maintenant que $G$ est une autre primitive de $f$ qui s'annule en $a$. Posons $H = F - G$. On a alors,

$$\forall x \in [a, b], H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0; \;\; H(a) = F(a) - G(a) = 0.$$

D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $c \in [a, b]$, il existe $x \in ]a, c[$ tel que

$$H(c) = H(c) - H(a) = H'(x)(c - a) = 0.$$

Autrement dit, $H$ est identiquement nulle, c'est-à-dire que $F = G$. ■

COROLLAIRE 2.20. *Soit $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On a, pour tout $x \in [a, b]$,*

$$\int_a^x G'(t)dt = G(x) - G(a).$$

DÉMONSTRATION. On pose $f = G'$ et on applique le théorème précédent, la fonction $x \to \int_a^x G'(t)dt$ est l'unique primitive de $G'$ qui s'annule en $a$. Elle coïncide donc avec la fonction $x :\to G(x) - G(a)$. ■

THÉORÈME 2.21 (Changement de variables). *Soit $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $f : \phi([a,b]) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors on a :*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx.$$

DÉMONSTRATION. Soit $F$ une primitive de $f$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt &= \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} F'(t)dt = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) \\
&= (F \circ \phi)(a) - (F \circ \phi)(b) = \int_a^b (F \circ \phi)'(x)dx \\
&= \int_a^b F'(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx.
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.22. Lorsque $\phi$ est strictement croissante sur $[a,b]$, on a $\phi([a,b]) = [\phi(a),\phi(b)]$. Il suffit alors de vérifier que $\phi$ est continue sur $[a,b]$ et que $f$ est continue sur $[\phi(a),\phi(b)]$. De même, lorsque $\phi$ est strictement décroissante sur $[a,b]$, on a $\phi([a,b]) = [\phi(b),\phi(a)]$. Il suffit alors de vérifier que $\phi$ est continue sur $[a,b]$ et que $f$ est continue sur $[\phi(b),\phi(a)]$. ‘

THÉORÈME 2.23 (Intégration par parties). *Soit $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors on a :*

$$\int_a^b f'(t)g(t) = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt,$$

*où on a noté*

$$[f(t)g(t)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'(t)g(t) + \int_a^b f(t)g'(t)dt &= \int_a^b (f'(t)g(t) + f(t)g'(t))dt \\
&= \int_a^b (fg)'(t)dt = (fg)(b) - (fg)(a) = [f(t)g(t)]_a^b.
\end{aligned}$$

■

## 3. Fonctions continues par morceaux

Définition 3.1 (Fonction continue par morceaux).

On dit que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = \{\alpha_j\}_{0=1,\dots,n}$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$ on a :

- $f$ est continue sur chaque intervalle $]\alpha_{j-1}, \alpha_j[$ ;
- la limite de $f$ à droite de $\alpha_{j-1}$ existe. On la notera $f^+(\alpha_{j-1})$ ;
- la limite de $f$ à gauche de $\alpha_j$ existe. On la notera $f^-(\alpha_j)$.

Pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, on notera alors $f_j$ la fonction définie par :

$$\forall x \in ]\alpha_{j-1}, \alpha_j[,\ \ f_j(x) = f(x),\ f_j(\alpha_j) = f^-(\alpha_j),\ f_j(\alpha_{j-1}) = f^+(\alpha_{j-1}).$$

Chaque fonction $f_j$ est ainsi par définition continue sur $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$.

Remarque 3.2. Toute fonction continue sur $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$. Toute fonction en escalier sur $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

Définition 3.3 (Intégrale de fonction continue par morceaux).

En reprenant les notations précédentes, on définit l'intégrale de $f$ par :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f_j(x)dx.$$

Les propositions (2.13), (2.14) , (2.15), (2.16) et (2.17) sont encore valables si on remplace $f$ continue par $f$ continue par morceaux.

PROPOSITION 3.4. *Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ se décompose en somme d'une fonction continue et d'une fonction en escalier sur $[a,b]$.*

DÉMONSTRATION. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On définit $h$ sur $[a,b]$ par :

$$\begin{array}{rcl} h(a) & = & f(a^+), \\ \forall j \in \{1,\dots,n\},\ \forall x \in ]\alpha_{j-1}, \alpha_j[,\ h(x) & = & f(x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} (f^-(\alpha_k) - f^+(\alpha_k)), \\ h(\alpha_j) & = & f^-(\alpha_j) + \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} (f^-(\alpha_k) - f^+(\alpha_k)) \end{array}$$

Et on définit $e$ par :

$$\begin{aligned} e(a) &= f(a) - f^+(a), \\ \forall j \in \{1, \ldots, n\},\ \forall x \in ]\alpha_{j-1}, \alpha_j[,\ e(x) &= \sum_{k=1}^{j-1} (f^+(\alpha_k) - f^-(\alpha_k)), \\ e(\alpha_j) &= f(\alpha_j) - f^-(\alpha_j) - \sum_{k=1}^{j-1} (f^-(\alpha_k) - f^+(\alpha_k)) \end{aligned}$$

On a bien $f = h + e$ et $e$ est en escalier. Il reste à vérifier que $h$ est continue sur $[a, b]$ : Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $h$ est continue sur $]\alpha_{j-1}, \alpha_j[$ comme somme de fonctions continues.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \alpha_j^-} h(x) &= \lim_{x \to \alpha_j^-} (f(x) + \sum_{k=1}^{j-1} (f^-(\alpha_k) - f^+(\alpha_k)) \\ &= f^-(\alpha_j) + \sum_{k=1}^{j-1} (f^-(\alpha_k) - f^+(\alpha_k)) = h(\alpha_j). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \alpha_{j-1}^+} h(x) &= \lim_{x \to \alpha_{j-1}^+} (f(x) + \sum_{k=1}^{j-1} (f^-(\alpha_k) - f^+(\alpha_k)) \\ &= f^+(\alpha_{j-1}) + \sum_{k=1}^{j-1} (f^-(\alpha_k) - f^+(\alpha_k)) \\ &= f^-(\alpha_{j-1}) + \sum_{k=1}^{j-2} (f^-(\alpha_k) - f^+(\alpha_k)) = h(\alpha_{j-1}). \end{aligned}$$

Remarquons que l'on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b h(x)dx + \int_a^b e(x)dx.$$

■

Remarque 3.5. L'ensemble $\mathcal{C}^0_{pm}([a, b])$ des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Il contient le sous-espace $\mathcal{E}([a, b])$ des fonctions en escalier sur $[a, b]$ et le sous-espace $\mathcal{C}^0([a, b])$ des fonctions continues sur $[a, b]$. La dernière proposition dit que

$$\mathcal{C}^0_{pm}([a, b]) = \mathcal{C}^0([a, b]) + \mathcal{E}([a, b]).$$

De plus,

$$\mathcal{C}^0([a, b]) \cap \mathcal{E}([a, b]) = \{\text{fonctions constantes sur } [a, b]\}.$$

La somme n'est donc pas directe, mais elle n'en est pas loin.