CHAPITRE II : INTEGRALES GÉNÉRALISÉES

Dans tout ce chapitre, on posera $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

1. Définitions

Définition 1.1.

- Soit $f\ :\ [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $x \in [a,b[$, on pose
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$
On dit que l'intégrale de f sur $[a,b]$ est convergente si $F(x)$ admet une limite quand x tend vers b à gauche. On note alors :
$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt.$$
- Soit $f\ :\ ]a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $x \in]a,b]$, on pose
$$F(x) = \int_x^b f(t)dt.$$
On dit que l'intégrale de f sur $[a,b]$ est convergente si $F(x)$ admet une limite quand x tend vers a à droite. On note alors :
$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt.$$
- Soit $f\ :\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale de f sur $[a,b]$ est convergente s'il existe $c \in]a,b[$ tel que les deux intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent. Dans ce cas, on pose :
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$
On peut alors remplacer c par n'importe quel autre élément de $]a,b[$.

2. Exemples de référence

PROPOSITION 2.1.

(1) *L'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

(2) *L'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$.

DÉMONSTRATION.

(1) **Cas** $\alpha = 1$

$$\int_1^x \frac{1}{t}dt = [\ln t]_1^x = \ln x \to_{x\to+\infty} +\infty.$$

L'intégrale diverge.

Cas $\alpha < 1$

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1-\alpha}\left[t^{1-\alpha}\right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha}-1\right) \to_{x\to+\infty} +\infty.$$

L'intégrale diverge.

Cas $\alpha > 1$

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1-\alpha}\ \left(x^{1-\alpha}-1\right) = \frac{1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) \to_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha-1}.$$

L'intégrale converge et vaut $\frac{1}{\alpha-1}$.

(2) **Cas** $\alpha = 1$

$$\int_x^1 \frac{1}{t}dt = [\ln t]_x^1 = -\ln x \to_{x\to0^+} +\infty.$$

L'intégrale diverge.

Cas $\alpha < 1$

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1-\alpha}\left[t^{1-\alpha}\right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(1-x^{1-\alpha}\right) \to_{x\to0^+} \frac{1}{1-\alpha}.$$

L'intégrale converge et vaut $\frac{1}{1-\alpha}$.

Cas $\alpha > 1$

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1-\alpha}\ \left(1-x^{1-\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}-1\right) \to_{x\to0^+} +\infty.$$

L'intégrale diverge.

■

Remarque 2.2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ diverge donc pour toutes valeurs de α.

PROPOSITION 2.3.
L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}dt$ converge si et seulement si $\alpha < 0$.

DÉMONSTRATION.
Posons $F(x) = \int_0^x e^{\alpha t}dt$ pour $x \in [0, +\infty[$ et étudions la limite de $F(x)$ quand $x \to +\infty$.

Cas $\alpha = 0$

$$\int_0^x e^{\alpha t}dt = \int_0^x 1dt = x \to_{x\to+\infty} +\infty.$$

L'intégrale ne converge pas.

Cas $\alpha > 0$

$$\int_0^x e^{\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha}\left[e^{\alpha t}\right]_0^x = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha x}-1) \to_{x\to+\infty} +\infty.$$

L'intégrale ne converge pas.

Cas $\alpha < 0$

$$\int_0^x e^{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}\left[e^{\alpha t}\right]_0^x = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1) \to_{x\to+\infty} \frac{-1}{\alpha}.$$

L'intégrale converge et vaut $\frac{-1}{\alpha}$. ■

3. Propriétés

PROPOSITION 3.1 (Linéarité). *Soient f, g deux fonctions continues sur $]a, b[$. Si $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_a^b (\alpha f(t) + g(t))dt$ converge et on a :*

$$\int_a^b (\alpha f(t) + g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$

DÉMONSTRATION. Soit $c \in]a, b[$. Pour tout $x \in [c, b[$, f est continue sur $[c, x]$ donc on a

$$\int_c^x (\alpha f(t) + g(t))dt = \alpha \int_c^x f(t)dt + \int_c^x g(t)dt.$$

En faisant tendre x vers b à gauche, on obtient

$$\int_c^b (\alpha f(t) + g(t))dt = \alpha \int_c^b f(t)dt + \int_c^b g(t)dt.$$

Pour tout $x \in]a, c]$, f est continue sur $[x, c]$ donc on a on a :

$$\int_x^c (\alpha f(t) + g(t))dt = \alpha \int_x^c f(t)dt + \int_c^x g(t)dt.$$

En faisant tendre x vers a à droite, on obtient

$$\int_a^c (\alpha f(t) + g(t))dt = \alpha \int_a^c f(t)dt + \int_a^c g(t)dt.$$

On sommant (3) et (3), on obtient finalement

$$\int_a^b (\alpha f(t) + g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$

■

PROPOSITION 3.2 (Croissance). *Soient f, g deux fonctions continues sur $]a, b[$. On suppose que pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \leq g(x)$, et que $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent. Alors on a :*

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $x \in [c, b[$, f est continue sur $[c, x]$ donc on a

$$\int_c^x f(t)dt \leq \int_c^x g(t)dt.$$

En faisant tendre x vers b à gauche, on obtient

$$\int_c^b f(t)dt \leq \int_c^b g(t)dt.$$

Pour tout $x \in]a,c]$, f est continue sur $[x,c]$ donc on a

$$\int_x^c f(t)dt \leq \int_x^c g(t)dt.$$

En faisant tendre x vers a à droite, on obtient

$$\int_a^c f(t)dt \leq \int_a^c g(t)dt.$$

On sommant (3) et (3), on obtient finalement

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

$\blacksquare$

THÉORÈME 3.3 (Changement de variables). *Soit $\phi :]a,b[\to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante. On note $l_a = \lim_{t\to a^+} \phi(t) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $l_b = \lim_{t\to b^-} \phi(t) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*
Soit $f :]l_a, l_b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors les deux intégrales $\int_{l_a}^{l_b} f(x)dx$ et $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$ sont de même nature et lorsqu'elles convergent, on a :

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{l_a}^{l_b} f(x)dx.$$

DÉMONSTRATION. Soit $c \in]a,b[$. Remarquons qu'étant strictement croissante et continue, ϕ est bijective de $]a,c]$ vers $]l_a, \phi(c)]$ et de $[c,b[$ vers $[\phi(c), l_b[$.

D'après la formule de changement de variables pour les fonctions continues, pour tout $u \in]a,c]$, on a

$$\int_u^c f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(u)}^{\phi(c)} f(x)dx.$$

Comme $x \to u^+$ si et seulement si $\phi(u) \to l_a^+$, les intégrales $\int_a^c f(\phi(t))\phi'(t)dt$ et $\int_{l_a}^{\phi(c)} f(x)dx$ sont de même nature et en cas de convergence elles sont égales.

De même, pour tout $u \in [c,b[$, on a

$$\int_c^u f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(c)}^{\phi(u)} f(x)dx.$$

Comme $u \to b^-$ si et seulement si $\phi(u) \to l_b^-$, les intégrales $\int_c^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$ et $\int_{\phi(c)}^{l_b} f(x)dx$ sont de même nature et en cas de convergence elles sont égales.

Par définition, $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$ converge si et seulement si $\int_a^c f(\phi(t))\phi'(t)dt$ et $\int_c^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$ convergent toutes les deux De même, $\int_{l_a}^{l_b} f(x)dx$ converge si et seulement si $\int_{l_a}^{\phi(c)} f(x)dx$ et $\int_{\phi(c)}^{l_b} f(x)dx$ convergent toutes les deux. En cas de convergence, on a d'après ce qui précède

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt &= \int_a^c f(\phi(t))\phi'(t)dt + \int_c^b f(\phi(t))\phi'(t)dt \\ &= \int_{l_a}^{\phi(c)} f(x)dx + \int_{\phi(c)}^{l_b} f(x)dx \\ &= \int_{l_a}^{l_b} f(x)dx.\end{aligned}$$

■

THÉORÈME 3.4. *[Intégration par parties] Soit $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Si la fonction fg admet des limites finies en a^+ et en b^-, alors les deux intégrales $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ et $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ sont de même nature et lorsqu'elles convergent, on a :*

$$\int_a^b f'(t)g(t) = [f(t)g(t)]_{a^+}^{b-} - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

où on a noté

$$[f(t)g(t)]_{a^+}^{b-} = \lim_{t\to a^+}(f(t)g(t)) - \lim_{t\to b^-} f(t)g(t)$$

DÉMONSTRATION. Soit $x, y \in]a, b[$. La formule d'intégration par parties sur $[x, y]$ donne :

$$\int_x^y f'(t)g(t) = f(y)g(y) - f(x)g(x) - \int_x^y f(t)g'(t)dt.$$

Il suffit ensuite de passer à la limite quand $x \to a^+$ et $y \to b^-$. ■

PROPOSITION 3.5. *Soit $f : [a, b[:\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \subset [a, b[$ qui converge vers b, la suite $(\int_a^{x_n} f(t)dt)_n$ est convergente. De plus, en cas de convergence, on a :*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{x_n} f(t)dt.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer un résultat vu dans le cours sur les suites réelles. Posons $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. On sait que $F(x)$ a une limite au point b^- si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \subset [a, b[$ qui converge vers b, la suite $(F(x_n))_n$ est convergente et en cas de convergence,

$$\lim_{x\to b^-} F(x) = \lim_{n\to+\infty} F(x_n).$$

■

4. Critères de convergence pour les intégrales de fonctions positives

Les propriétés suivantes seront énoncées pour des fonctions continues sur $[a, b[$ mais sont facilement transposables au cas des fonctions continues sur $]a, b]$.

PROPOSITION 4.1. *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement il existe $M > 0$ telle que, pour tout $x \in [a, b[$,*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \leq M.$$

Dans le cas contraire, $F(x) = \int_a^x f(t)dt \to_{x\to b^-} +\infty$.

DÉMONSTRATION. Comme f est positive, la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est croissante sur $[a, b[$. Il suffit d'alors d'appliquer le résultat analogue sur la convergence en un point de fonctions croissantes. ■

PROPOSITION 4.2 (Comparaison par inégalités).
Soient deux fonctions continues $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}^+$. Supposons qu'il existe une constante $\lambda \geq 0$ telle que pour tout $x \in [a, b[$,

$$0 \leq f(x) \leq \lambda g(x).$$

Alors
(i) *Si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge.*
(ii) *Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ diverge.*

DÉMONSTRATION. On pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. On utilise la proposition 4.1 :
(i) Si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [a, b[$, $G(x) \leq M$. Alors

$$0 \leq F(x) \leq \lambda G(x) \leq \lambda M.$$

On en déduit que la série $\int_a^b f(t)dt$ converge.
(ii) C'est la contraposée de (i).

■

PROPOSITION 4.3. *[Comparaison par petit o]*
Soient deux fonctions continues $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}^+$. Supposons que $f(x) =_{x\to b^-} o(g(x))$. Alors la convergence de $\int_a^b g(t)dt$ implique celle $\int_a^b f(t)dt$.

DÉMONSTRATION.
Rappel : $f(t) =_{t\to b^-} o(g(t))$ veut dire qu'il existe $\eta > 0$ et une fonction $h : [b - \eta, b[\to \mathbb{R}$ telle que

$$h(t) \to_{t\to b^-} 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in [b - \eta, b[, \;\; f(t) = h(t)g(t).$$

Si g ne s'annule pas au voisinage de b^-, ceci est équivalent à : $\frac{f(t)}{g(t)} \to_{t\to b^-} 0$.

Remarquons que h est positive. Il existe $\eta > \varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [b-\varepsilon, b[$, $|h(t)| \leq 1$. On a alors

$$\forall t \in [b-\varepsilon, b[, \quad f(t) = h(t)g(t) \leq g(t)$$

D'après Proposition 4.1, $\int_a^b g(t)dt$ converge $\Longleftrightarrow \int_{b-\varepsilon}^b g(t)dt$ converge $\Longrightarrow \int_{b-\varepsilon}^b f(t)dt$ converge $\Longleftrightarrow \int_a^b f(t)dt$. ■

PROPOSITION 4.4 (Comparaison par équivalence).
Soient deux fonctions continues $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}^+$. Supposons que $f(t) \simeq_{t\to b^-} g(t)$. Alors les deux intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

DÉMONSTRATION.
Rappel : $f(t) \simeq_{t\to b^-} g(t)$ veut dire qu'il existe $\eta > 0$ et une fonction $h : [b-\eta, b[\to \mathbb{R}$ telle que

$$h(t) \to_{t\to b^-} 1 \quad \text{et} \quad \forall t \in [b-\eta, b[, \quad f(t) = h(t)g(t).$$

Si g ne s'annule pas au voisinage de b^-, ceci est équivalent à : $\frac{f(t)}{g(t)} \to_{t\to b^-} 1$.

Remarquons que h est positive. Il existe $\eta > \varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [b-\varepsilon, b[$, $|h(t)-1| < \frac{1}{2}$. On a alors,

$$\forall t \in [b-\varepsilon, b[, \quad \frac{1}{2} \leq 1 - |h(t)-1| \leq h(t) \leq |h(t)-1| + 1 \leq \frac{3}{2}$$

et par conséquent

$$\frac{1}{2}g(t) \leq f(t) = h(t)g(t) \leq \frac{3}{2}g(t).$$

D'après Proposition 4.1, $\int_a^b g(t)dt$ converge $\Longleftrightarrow \int_{b-\varepsilon}^b g(t)dt$ converge $\Longleftrightarrow \int_{b-\varepsilon}^b f(t)dt \Longleftrightarrow \int_a^b f(t)dt$ converge. ■

PROPOSITION 4.5 (Intégrales de Bertrand). *L'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{1}{(\ln t)^\beta t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).*

DÉMONSTRATION.
Cas où $\alpha = 1$, $\beta = 1$:

$$\int_e^x \frac{1}{t \ln t} dt = [\ln(\ln t)]_e^x = \ln(\ln x) \to_{x\to+\infty} +\infty.$$

L'intégrale diverge.
Cas où $\alpha = 1$, $\beta < 1$:

$$\int_e^x \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt = \int_e^x \frac{1}{t}(\ln t)^{-\beta} dt = \frac{1}{1-\beta}\left[(\ln t)^{1-\beta}\right]_e^x = \frac{1}{1-\beta}\left((\ln x)^{1-\beta} - 1\right) \to_{x\to+\infty} +\infty.$$

L'intégrale diverge.
Cas où $\alpha = 1$, $\beta > 1$:

$$\int_e^x \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt = \int_e^x \frac{1}{t}(\ln t)^{-\beta} dt = \frac{1}{1-\beta}\left[1 - (\ln t)^{1-\beta}\right]_e^x = \frac{1}{\beta-1}\left(1 - (\ln x)^{1-\beta}\right) \to_{x\to+\infty} \frac{1}{\beta-1}.$$

L'intégrale converge et vaut $\frac{1}{\beta-1}$.

Pour le cas où $\alpha \neq 1$, nous allons utiliser la comparaison par petit o (Proposition 4.3) avec l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{1+\alpha}{2}}} dt$ qui, d'après Proposition 2.1 converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.

Rappelons d'abord que pour tout $a > 0$ et pour tout $b \in \mathbb{R}$, $(\ln t)^b =_{t\to+\infty} o(t^a)$, c'est à dire que $(\ln t)^b t^{-a} \to_{t\to+\infty} 0$.

Cas où $\alpha > 1$: Remarquons que $\frac{t^{\frac{1+\alpha}{2}}}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = t^{-\frac{\alpha-1}{2}} (\ln t)^{-\beta} \to_{t\to+\infty} 0$, autrement dit que $\frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = o(\frac{1}{t^{\frac{1+\alpha}{2}}})$. La convergence de $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{1+\alpha}{2}}} dt$ implique la convergence de $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} dt$.

Cas où $\alpha < 1$: Remarquons cette fois-ci que $\frac{t^\alpha(\ln t)^\beta}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} = (\ln t)^\beta t^{-\frac{1-\alpha}{2}} \to_{t\to+\infty} 0$, autrement dit que $\frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} = o(\frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta})$. La divergence de $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} dt$ implique la divergence de $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} dt$. ■

5. Convergence absolue

Définition 5.1 (Convergence absolue). On dit qu'une intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente.

THÉORÈME 5.2. *Si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge. On a alors :*

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

DÉMONSTRATION. Supposons que $\int_a^b |f(t)|dt$ converge et posons

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad G(x) = \int_a^x |f(t)|dt.$$

Soit $(x_n)_n$ une suite de $[a, b[$ qui converge vers b. Alors la suite $(G(x_n))_n$ converge vers $\int_a^b |f(t)|dt$. En particulier, elle de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq q \geq N$,

$$|G(x_p) - G(x_q)| = \left| \int_{x_p}^{x_q} |f(t)|dt \right| < \varepsilon.$$

On en déduit, pour tout $p \geq q \geq N$,

$$|F(x_p) - F(x_q)| = \left| \int_{x_p}^{x_q} f(t)dt \right| \leq \left| \int_{x_p}^{x_q} |f(t)|dt \right| < \varepsilon.$$

Nous avons montré que la suite $(F(x_n))_n$ est de Cauchy, autrement dit $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ est une intégrale convergente. Pour tout $x \in [a, b[$, on a :

$$\left| \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x |f(t)|dt \right|.$$

Par passage à la limite quand $x \to b^-$,

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

■

Définition 5.3. On dit qu'une intégrale est semi-convergente si elle convergente mais pas absolument convergente.

THÉORÈME 5.4 (Critère d'Abel). *Soient* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *et* $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On suppose que*

(i) *Il existe* $M > 0$ *tel que pour tout* $x \in [a, b[$, $|\int_a^x g(t)dt| \leq M$;

(ii) f *est décroissante sur* $[a, b[$;

(iii) $\lim_{t \to b^-} f(t) = 0$.

Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)g(t)dt$ *est convergente.*

DÉMONSTRATION. Remarquons que f est positive et que sa dérivée f' est négative.

Posons $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)dt$ pour tout $x \in [a, b[$. G est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$, $G' = g$ et d'après l'hypothèse (i), $|G(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a, b[$.

Montrons d'abord que l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f'(t)G(t)dt$ est absolument convergente, autrement dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^x |f'(t)G(t)|dt$ est convergente.

Pour tout $x \in [a, b[$, on a

$$\begin{aligned} \int_a^x |f'(t)G(t)|dt &\leq M \int_a^x |f'(t)|dt \\ &= -M \int_a^x f'(t)dt \\ &= M\left(f(a) - f(x)\right) \leq Mf(a) \end{aligned}$$

D'après Proposition 4.1, l'intégrale $\int_a^x |f'(t)G(t)|dt$ converge.

De plus, pour tout $x \in [a, b[$,

$$|G(x)f(x)| \leq M|f(x)| \to_{x \to b^-} 0$$

donc $G(x)f(x) \to_{x \to b^-} 0$.

D'après Théorème 3.4 sur l'intégration par parties, l'intégrale $\int_a^b f(t)g(t)dt$ converge et

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = \lim_{x \to b^-} f(x)G(x) - f(a)G(a) - \int_a^b f'(t)G(t)dt = -\int_a^b f'(t)G(t)dt.$$

■