Chapitre 1 - LE CORPS DES NOMBRES RÉELS

1. Structure de corps commutatif

L'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, est muni d'une addition et d'une multiplication vérifiant les axiomes suivants :

<u>Axiomes de l'addition</u>

A1 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \in \mathbb{R}$.
A2 (Commutativité) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x$.
A3 (Associativité) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R},\ (x + y) + z = x + (y + z)$.
A4 (Élément neutre) Il existe un élément $0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, 0 + x = x$.
A5 (Élément inverse) $\forall x \in \mathbb{R}$, il existe $-x \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$.

<u>Axiomes de la multiplication</u>

M1 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \times y \in \mathbb{R}$.
M2 (Commutativité) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x \times y = y \times x$.
M3 (Associativité) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R},\ (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.
M4 (Élément neutre) Il existe un élément $1 \in \mathbb{R}$ tel que $1 \neq 0$, et $\forall x \in \mathbb{R}, 1 \times x = a$.
M5 (Élément inverse) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il existe $x^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \times x^{-1} = 1$.

<u>Axiome de la Distributivité</u>

D $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R},\quad x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$.

Remarque 1.1. Les propriétés A1,$\cdots$, A5, M1, $\cdots$, M5, D expriment que $\mathbb{R}$ est un corps commutatif.

PROPOSITION 1.2. *Il y a unicité des éléments neutres et des inverses pour l'addition et pour la multiplication.*

PREUVE. Montrons que l'addition admet un unique élément neutre. Supposons que 0 et $0'$ sont deux éléments neutres pour l'addition. On a alors

$$0 = 0 + 0' = 0'.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que x admet un unique inverse pour l'addition. Soient $-x$ et y deux inverses. On a alors, en utilisant A3 et A4,

$$\begin{aligned} 0 = -x + x = y + x &\Longrightarrow (-x + x) + (-x) = (y + x) + (-x) \\ &\Longrightarrow -x + (x + (-x)) = y + (x + (-x)) \\ &\Longrightarrow -x + 0 = y + 0 \Longrightarrow -x = y. \end{aligned}$$

Montrons que la multiplication admet un unique élément neutre. Supposons que 1 et $1'$ sont deux éléments neutres pour la multiplication. On a alors

$$1 = 1 \times 1' = 1'.$$

Soit $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. Montrons que x admet un unique inverse pour la multiplication. Soient x^{-1} et y deux inverses. On a alors, en utilisant M3 et M4,

$$\begin{aligned} 1 = x^{-1} \times x = y \times x &\Longrightarrow (x^{-1} \times x) \times x^{-1} = (y \times x) \times x^{-1} \\ &\Longrightarrow x^{-1} \times (x \times x^{-1}) = y \times (x \times x^{-1}) \\ &\Longrightarrow x^{-1} \times 1 = y \times 1 \Longrightarrow x^{-1} = y. \end{aligned}$$

□

Notations :

- $x - y := x + (-y)$
- $xy = x \times y$
- $\frac{x}{y} := xy^{-1}$
- $x^0 := 1$ pour tout $x \neq 0$
- $x^2 := x \times x$

PROPOSITION 1.3 (Identités remarquables).
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

(1) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
(2) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.

PREUVE.
(1) En utilisant A2 et A3, on a

$$(x+y)^2 = (x+y)\times(x+y) = x\times(x+y)+y\times(x+y) = x\times x+x\times y+y\times x+y\times y = x^2+2xy+y^2.$$

(2) En utilisant A2 et A3, on a

$$(x+y)(x-y) = x \times (x+y) + y \times (x+y) = x \times x - x \times y + y \times x - y \times y = x^2 - y^2.$$

□

PROPOSITION 1.4.
Pour tout $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

(1) $-(-x) = x$,
(2) $x + z = y + z \Longleftrightarrow x = y$,
(3) $0x = 0$
(4) $(-1) \times x = -x$,
(5) $(-1)^2 = 1$,
(6) $(-x)^2 = x^2$,
(7) Si $x \neq 0$, *alors* $x^{-1} \neq 0$ *et* $(x^{-1})^{-1} = x$,
(8) Si $x \neq 0$, *alors* $xy = xz \Longrightarrow y = z$,
(9) Si $xy = 0$, *alors* $x = 0$ *ou* $y = 0$.
(10) si $x \neq 0$ *et* $y \neq 0$, *alors* $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.

PREUVE. Pour tout $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

(1) Comme $(-x) + x = 0$, on a $x = -(-x)$.
(2) $x + z = y + z \Longleftrightarrow x + z - z = y + z - z \Longleftrightarrow x + 0 = y + 0 \Longleftrightarrow x = y$.

(3) $0x + 0x = (0+0)x = 0x$. D'après (2), on déduit que $0x = 0$.
(4) D'après D et (3), on a

$$(-1)x + x = (-1+1)x = 0x = 0.$$

Par unicité de l'inverse, on en déduit que $(-1)x = -x$.
(5) Appliquons (4) avec $x = -1$, puis (1).

$$(-1)^2 = -(-1) = 1.$$

(6) Grâce à M2, M3, M4, (4) et (5), on obtient

$$(-x)^2 = ((-1)x)^2 = (-1)^2 x^2 = x^2.$$

(7) On a $xx^{-1} = 1 \neq 0$ donc d'après (3), $x^{-1} \neq 0$ et par définition de l'inverse, on a $(x^{-1})^{-1} = x$.
(8) Si $x \neq 0$, alors

$$xy = xz \Longrightarrow x^{-1}xy = x^{-1}xz \Longrightarrow 1 \times y = 1 \times z \Longrightarrow y = z.$$

(9) Si $x \neq 0$, alors d'après (3),

$$xy = 0 \Longrightarrow x^{-1}xy = 0 \Longrightarrow y = 0.$$

(10) si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, alors grâce à M2, M3 M4 et M5, on a

$$(xy)x^{-1}y^{-1} = (xx^{-1})(yy^{-1}) = 1 \times 1 = 1.$$

$\square$

2. Ordre sur $\mathbb{R}$

Outre les opérations et les axiomes arithmétiques, l'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation entre ses éléments notée $\leq$ vérifiant les axiomes suivants :

Axiomes d'ordre

O1 (Réflexivité) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$
O2 (antisymétrie) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $(x \leq y$ et $y \leq x) \Longleftrightarrow x = y$
O3 (transitivité) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{R}$, $(x \leq y$ et $y \leq z) \Longrightarrow x \leq z$
O4 (ordre total) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $(x \leq y$ ou $y \leq x)$
O5 (compatibilité avec l'addition) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{R}$, $x \leq y \Longleftrightarrow x + z \leq y + z$
O6 (compatibilité avec la multiplication) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{R}$,

$$(x \leq y,\ 0 \leq z) \Longleftrightarrow xz \leq yz$$

Remarque 2.1. Les propriétés O1,$\cdots$, O6 expriment que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné.

Définition 2.2. On écrira $x < y$ si $x \leq y$ et $x \neq y$.

On écrira de manière équivalente $x \leq y$ et $y \geq x$. De même, on écrira de manière équivalente $x < y$ et $y > x$.

PROPOSITION 2.3. *On a les propriétés suivantes pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$:*
(1) $x > y \Longleftrightarrow x + z > y + z$.

(2) $x > 0 \iff -x < 0$
(3) $x > 0 \quad$ *et* $\quad y > z \implies xy > xz$
(4) $x < 0 \quad$ *et* $\quad y > z \implies xy < xz$
(5) $x^2 \geq 0$
(6) $1 > 0$
(7) $x > 0 \implies x^{-1} > 0$
(8) $0 < x < y \implies 0 < y^{-1} < x^{-1}$.

PREUVE.

(1) Si $x > y$, d'après O5 on a $x + z \geq y + z$ et le point (2) de Proposition 1.4 permet de dire que $x + z \neq y + z$.
(2) $x > 0 \implies -x + x > -x + 0 \implies 0 > -x$.
Réciproquement,
$-x < 0 \implies -x + x < 0 + x \implies 0 < x$.
(3) Par O6, on a $xy \geq xz$. De plus, d'après le point (7) de Proposition 1.4, comme $x \neq 0$ et $y \neq z$, on a $xy \neq xz$.
(4) D'après (2), $-x > 0$ et d'après (3), $(-x)y > (-x)z$. On a alors

$$-xy > -xz \implies -xy + xy + xz > -xz + xy + xz \implies xz > xy.$$

(5) On utilise (3). Si $x > 0$, alors $x^2 \geq x \times 0 = 0$, si $x < 0$, alors $x^2 = (-x)^2 \geq 0$ et si $x = 0$, alors $x^2 = x \times 0 = 0$.
(6) Il suffit d'appliquer (5) avec $x = 1$ et de noter que $1 \neq 0$.
(7) Supposons $x > 0$. On sait déja que $x^{-1} \neq 0$. Si par l'absurde, $x^{-1} < 0$, alors d'après (4), on aurait $1 = xx^{-1} < 0$, ce qui contredirait (6).
(8) On a $x^{-1} > 0$ et $y^{-1} > 0$ par (7). En appliquant (3) deux fois, on obtient

$$x < y \implies x^{-1}x < yx^{-1} \implies 1 < yx^{-1} \implies y^{-1} < y^{-1}yx^{-1} \implies y^{-1} < x^{-1}. \qquad \square$$

Définition 2.4 (Intervalle). Pour deux réels $a < b$, on appelle intervalles les ensembles définis ci-dessous :

$$\begin{aligned}
]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\}, \\
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\}, \\
]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \leq b\}, \\
[a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x < b\}, \\
]a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > a\}, \\
[a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq a\}, \\
]-\infty, b[&= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < b\}, \\
]-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq b\}.
\end{aligned}$$

3. Valeur absolue

Définition 3.1. On définit la valeur absolue de $a \in \mathbb{R}$ par la formule

$$|a| := \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0, \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Remarque 3.2. Par définition, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $|a| \geq 0$.

PROPOSITION 3.3.

(1) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $|a| = |-a|$.
(2) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a^2 = |a|^2$.
(3) $a^2 = b^2 \iff |a| = |b|$.

PREUVE.

(1) Si $a \geq 0$, alors $-a \leq 0$ et dans ce cas, $|a| = a$ et $|-a| = -(-a) = a$.
Si $a < 0$, alors $-a \geq 0$ et dans ce cas, $|a| = -a$ et $|-a| = -a$.
(2) Si $a \geq 0$, $|a| = a$ donc $|a|^2 = a^2$.
Si $a < 0$, alors $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$.
(3) $\implies$:

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 &\implies 0 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ &\implies a - b = 0 \text{ ou } a + b = 0 \implies a = b \text{ ou } a = -b \implies |a| = |b| . \end{aligned}$$

$\impliedby$:

$$|a| = |b| \implies |a|^2 = |b|^2 \implies a^2 = b^2.$$

$\square$

PROPOSITION 3.4.
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$a^2 \leq b^2 \iff |a| \leq |b| .$$

PREUVE.

- $\implies$: Procédons par contraposée en supposant que $|a| > |b|$. Alors $|a| + |b| > 0$ et
$$a^2 - b^2 = (|a| - |b|)(|a| + |b|) > 0.$$
On obtient alors $a^2 > b^2$.
- $\impliedby$: En multipliant d'abord par $|a|$, puis par $|b|$, on a
$$|a| \leq |b| \implies |a|^2 \leq |a|\,|b| \leq |b|^2 \implies a^2 \leq b^2.$$

$\square$

PROPOSITION 3.5.
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

(1) $|0| = 0$, et $|a| > 0$ si $a \neq 0$
(2) $|ab| = |a| \times |b|$
(3) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ si $b \neq 0$

(4) $|a| \leq b \Longrightarrow -b \leq a \leq b$
(5) $|a+b| \leq |a| + |b|$
(6) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Les dernières inégalités sont les inégalités triangulaires.

PREUVE.

(1) Comme $0 \geq 0$, par définition, on a $|0| = 0$.
Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$,

$$|a| = \begin{cases} a > 0 & \text{si } a > 0, \\ -a > 0 & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

(2) On distingue quatre cas:

$$|ab| = \begin{cases} ab = |a| \times |b| & \text{si } a \geq 0 \text{ et } b \geq 0, \\ ab = (-a) \times (-b) = |a| \times |b| & \text{si } a \leq 0 \text{ et } b \leq 0, \\ -ab = a \times (-b) = |a| \times |b| & \text{si } a \geq 0 \text{ et } b \leq 0, \\ -ab = (-a) \times b = |a| \times |b| & \text{si } a \leq 0 \text{ et } b \geq 0. \end{cases}$$

(3) On distingue quatre cas:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} & \text{si } a \geq 0 \text{ et } b > 0, \\ ab = \frac{-a}{-b} = \frac{|a|}{|b|} & \text{si } a \leq 0 \text{ et } b < 0, \\ -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{|a|}{|b|} & \text{si } a \geq 0 \text{ et } b < 0, \\ -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{|a|}{|b|} & \text{si } a \leq 0 \text{ et } b > 0. \end{cases}$$

(4) $\Longleftarrow$:
Supposons $-b \leq a \leq b$.
Si $a \geq 0$, alors $|a| = a \leq b$. Si $a < 0$, alors $|a| = -a \leq b$.
$\Longrightarrow$:
Supposons $|a| \leq b$ et remarquons que cela implique $b \geq 0$. De plus,
Si $a \geq 0$, alors $a \leq b$. On a alors $-b \leq 0 \leq a \leq b$.
Si $a < 0$, alors $-a \leq b$, ce qui implique $-b \leq a < 0 \leq b$.

(5) Si $a + b \geq 0$, alors

$$|a+b| = a + b \leq |a| + |b|\,;$$

si $a + b \leq 0$, alors

$$|a+b| = -(a+b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|\,.$$

(6) Il suffit de montrer que

$$|a| - |b| \leq |a-b| \quad \text{et} \quad |b| - |a| \leq |a-b|\,.$$

On obtient la première relation en appliquant (iv) avec $a - b$ et b à la place de a et b :

$$|a| = |(a-b) + b| \leq |a-b| + |b|\,,$$

puis retranchant $|b|$ des deux membres extrêmes. On en déduit la deuxième relation en échangeant le rôle de a et b, puis en utilisant l'égalité $|b - a| = |a - b|$.

$\square$

Définition 3.6 (maximum et minimum de deux nombres). Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Le nombre noté $\max(a, b)$ désigne le plus grand des deux nombres et le nombre noté $\min(a, b)$ désigne les plus petit des deux nombres.

Exemple 3.7. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $|a| = \max(a, -a)$ et $-|a| = \min(a, -a)$.

PROPOSITION 3.8.
Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on a

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2},$$
$$\min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

En particulier, en prenant $b = -a$, on retrouve

$$\max(a, -a) = |a| \text{ et } \min(a, -a) = -|a|.$$

PREUVE. Quitte à échanger les rôles de a et b, on peut supposer que $a \leq b$. On a alors $|a - b| = b - a$ et

$$\max(a, b) = b = \frac{a + b + |a - b|}{2},$$
$$\min(a, b) = a = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

□

Remarque 3.9. Pour tous $a, b, x \in \mathbb{R}$, on a

$$x \geq \max(a, b) \iff x \geq a \text{ et } x \geq b.$$
$$x \leq \min(a, b) \iff x \leq a \text{ et } x \leq b.$$

4. Ensemble des entiers naturels

Définition 4.1. Considérons tous les sous-ensembles A de $\mathbb{R}$ qui vérifient les deux propriétés suivantes :

a) $0 \in A$,
b) $n \in A \Longrightarrow n + 1 \in A$.

Remarquons que $\mathbb{R}$ lui-même vérifie a) et b). On note $\mathbb{N}$ et on appelle ensemble des entiers naturels l'intersection de toutes les parties A de $\mathbb{R}$ qui vérifient a) et b). Autrement dit, $\mathbb{N}$ est le plus petit sous-ensemble de $\mathbb{R}$ pour l'intersection vérifiant a) et b).

Remarque 4.2. La définition 4.1 est à la base de la démonstration par récurrence.
Par exemple, démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$.
Posons $A := \{n \in \mathbb{N} : 2^n \geq n\}$ et vérifions que A vérifie a) et b).

a) On a $0 \in A$ puisque $1 = 2^0 \geq 0$.

b) Supposons que $n \in A$. Alors $2^n \geq n \geq 1$. D'autre part, $2^n \geq 1$. D'où

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n \geq n + 1.$$

On a montré que $n \in A$.

L'ensemble A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui vérifie a) et b) et $\mathbb{N}$ est le plus petit sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui vérifie a) et b). Donc $\mathbb{N} \subset A$ (en fait, $\mathbb{N} = A$). Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \in A$, c'est à dire $2^n \geq n$. .

Il existe une forme renforcée de la méthode de récurrence :

PROPOSITION 4.3. *Si $B \subset \mathbb{N}$ vérifie les propriétés*

$$0 \in B \quad \text{et} \quad 0, 1, \ldots, n \in B \Longrightarrow n + 1 \in B, \tag{4.1}$$

alors $B = \mathbb{N}$.

* PREUVE. Posons $A := \{n \in \mathbb{N} \ : \ 0, \ldots, n \in B\}$. Alors $0 \in A$, et

$$n \in A \Longrightarrow 0, \ldots, n \in B \Longrightarrow n + 1 \in B \Longrightarrow n + 1 \in A,$$

donc $A = \mathbb{N}$ par la définition 4.1. Comme $A \subset B \subset \mathbb{N}$ par la définition de A, on conclut que $B = \mathbb{N}$. $\square$

PROPOSITION 4.4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n \geq 0$.*

PREUVE. L'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 0\}$ vérifie les propriétés a) et b). En effet, $0 \geq 0$ et si $n \geq 0$, comme $n + 1 > n$, on a $n + 1 > 0$. On a donc $\mathbb{N} \subset A$ (et même $\mathbb{N} = A$). $\square$

PROPOSITION 4.5.

$$\mathbb{N} \subset \{0\} \cup [1, +\infty[.$$

PREUVE. L'ensemble $A =;: \{n \in \mathbb{N} : n \in \{0\} \cup [1, +\infty[\}$ vérifie les propriétés a) et b). En effet, $0 \in \{0\} \cup [1, +\infty[$ et si $\{0\} \cup [1, +\infty[$, alors $n + 1 \geq 1$, donc $n + 1 \in \{0\} \cup [1, +\infty[$. On a donc $\mathbb{N} \subset A$ (et même $\mathbb{N} = A$). $\square$

En définissant $2 := 1 + 1$, $3 := 2 + 1$,..., on a

$$\mathbb{N} := \{0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\}.$$

On note :

- $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $nx := \overbrace{x + x + \cdots + x}^{n \text{ fois}}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
- $x^n := \overbrace{xx + \cdots x}^{n \text{ fois}}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
- $x^{-n} := \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 4.6. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a

$$x^n x^m = x^{n+m}, \quad (x^n)^m = x^{nm}.$$

Définition 4.7. On introduit deux autres sous-ensembles de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{-n \ : \ n \in \mathbb{N}^*\}\,; \ \ \mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\};$$
$$\mathbb{Q} := \{a/b \ : \ a \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{Z}^*\}\,, \ \ \mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$

Les éléments de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ s'appellent respectivement les *entiers* et les *nombres rationnels*.

Remarque 4.8. La définition 4.1 est à la base de la démonstration par récurrence.
Par exemple, démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$.
Posons $A := \{n \in \mathbb{N} : 2^n \geq n\}$ et vérifions que A vérifie a) et b).

a) On a $0 \in A$ puisque $1 = 2^0 \geq 0$.

b) Supposons que $n \in A$. Alors $2^n \geq n \geq 1$. D'autre part, $2^n \geq 1$. D'où

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n \geq n + 1.$$

On a montré que $n \in A$.

L'ensemble A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui vérifie a) et b) et $\mathbb{N}$ est le plus petit sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui vérifie a) et b). Donc $\mathbb{N} \subset A$ (en fait, $\mathbb{N} = A$). Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \in A$, c'est à dire $2^n \geq n$. .

Il existe une forme renforcée de la méthode de récurrence :

PROPOSITION 4.9. *Si $B \subset \mathbb{N}$ vérifie les propriétés*

$$0 \in B \quad \text{et} \quad 0, 1, \ldots, n \in B \Longrightarrow n + 1 \in B, \tag{4.2}$$

alors $B = \mathbb{N}$.

* PREUVE. Posons $A := \{n \in \mathbb{N} \ : \ 0, \ldots, n \in B\}$. Alors $0 \in A$, et

$$n \in A \Longrightarrow 0, \ldots, n \in B \Longrightarrow n + 1 \in B \Longrightarrow n + 1 \in A,$$

donc $A = \mathbb{N}$ par la définition 4.1. Comme $A \subset B \subset \mathbb{N}$ par la définition de A, on conclut que $B = \mathbb{N}$. □

PROPOSITION 4.10. *Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$.*

$$p < n + 1 \Longrightarrow p \leq n.$$

PREUVE. Supposons que $p < n+1$ et supposons par l'absurde que $p > n$. Alors $0 < p-n < 1$. On a alors $p - n \in \mathbb{N} \cap]0, 1[$. On obtient une contradiction car d'après Proposition 4.5, $\mathbb{N} \cap]0, 1[= \emptyset$
. □

Remarque 4.11. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $n, m \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$x^n x^m = x^{n+m}, \ \ (x^n)^m = x^{nm}.$$

Outre les axiomes algébriques, il y a un axiome supplémentaire, très important pour l'analyse :

Axiome d'Archimède :

A Pour tous $a > 0$ et $b > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $na > b$.

Remarque 4.12. L'axiome A exprime que $\mathbb{R}$ est archimédien.

5. Inégalité de Bernoulli

L'inégalité de Bernoulli nous sera très utile tout au long de ce cours.

THÉORÈME 5.1 (Inégalité de Bernoulli).

(i) *Si* $1+x \geq 0$, *alors* $(1+x)^n \geq 1+nx$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

(ii) *Plus généralement, si* $c > 0$ *et* $c+h \geq 0$, *alors* $(c+h)^n \geq c^n + n\,c^{n-1}h$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

PREUVE.

(i) Fixons $x \geq -1$ et démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

a) La propriété est vraie au rang 1 parce $(1+x)^1 = 1+x$; on a même une égalité.

b) Supposons que $(1+x)^n \geq 1+nx$. En multipliant la première inégalité par $1+x$, on obtient que
$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx),$$
parce que $1+x \geq 0$ par hypothèse. De manière équivalente,
$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2.$$
On conclut en observant que $nx^2 \geq 0$, et donc
$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

(ii) On applique (i) avec $x := h/c$, et on multiplie l'inégalité obtenue par c^n :
$$(c+h)^n = c^n\left(1+\frac{h}{c}\right)^n \geq c^n\left(1+n\frac{h}{c}\right) = c^n + n\,c^{n-1}h. \qquad \square$$

6. Minimum et maximum d'un ensemble

Définition 6.1.
Soit $E \subset \mathbb{R}$.

- S'il existe $M \in E$ tel que $x \leq M$ pour tout $x \in E$, on dit M est le plus grand élément de E et on note $M = \max E$,
- S'il existe $m \in E$ tel que $m \leq x$ pour tout $x \in E$, on dit m est le plus petit élément de E et on note $m = \min E$.

Remarque 6.2. Si $E = \{a, b\}$, $\max E$ et $\min E$ coïncident avec les définitions de $\max(a,b)$ et $\min(a,b)$.
Plus généralement, toute partie **finie** et non vide de $\mathbb{R}$ admet un plus petit et un plus grand élément.

Exemple 6.3. $\max]0,1] = 1$.
L'ensemble $E =]0,1]$ n'admet pas de plus petit élément.
En effet, pour tout $m \in]0,1]$, d'après **A**, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > \frac{1}{m}$. On a alors $\frac{1}{n} < m$ et $\frac{1}{n} \in]0,1]$.

Pour tout ensemble $E \subset \mathbb{R}$, nous posons $-E := \{-x \ : \ x \in E\}$.
Remarquons que $-(-E) = E$.

PROPOSITION 6.4.

(1) E admet un minimum si et seulement si $-E$ admet un maximum.
Dans ce cas, $\min E = -\max(-E)$.

(2) E admet un maximum si et seulement si $-E$ admet un minimum.
Dans ce cas, $\max E = -\min(-E)$.

PREUVE.

(1) Supposons que E admet un minimum et posons $m = \min E$. Alors $m \in E$, c'est-à-dire $-m \in -E$. De plus, pour tout $x \in -E$, comme $-x \in E$, on a $-x \geq m$, c'est-à-dire $x \leq -m$.
Réciproquement, supposons que $-E$ admet un maximum et posons $M = \max(-E)$. Alors $M \in -E$, c'est-à-dire $-M \in E$. De plus, pour tout $x \in E$, comme $-x \in -E$, on a $-x \leq M$, c'est-à-dire $x \geq -M$.

(2) Il suffit d'appliquer (1) à l'ensemble $E' = -E$.

$\square$

THÉORÈME 6.5. *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum.*

* PREUVE. Soit $A \subset \mathbb{N}$ n'ayant pas de plus petit élément. Il suffit de montrer que $A = \varnothing$. Posons $B = \mathbb{N} \setminus A$ et utilisons la forme renforcée de la démonstration par récurrence donnée par la proposition 4.9. Comme A n'a pas de minimum, $0 \in B$. Supposons que $0, 1, \ldots, n \in B$. Alors $A \subset \{m \in \mathbb{N} : m \geq n+1\}$, mais A n'a pas de plus petit élément, donc $n+1 \in B$. Finalement, $B = \mathbb{N}$, ce qui est équivalent à $A = \varnothing$. $\square$

7. Partie entière

PROPOSITION 7.1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $E_x = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ admet un plus grand élément. L'entier* $\max E_x$ *est appelé* partie entière *de x et il est noté $\lfloor x \rfloor$. C'est donc l'unique entier vérifiant*

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1,$$

ou, de manière équivalente,

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

* PREUVE.
Remarquons que, d'après A, l'ensemble $\{m \in \mathbb{N}^* \ : \ m > x - 1\}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$. D'après le théorème 6.5, cet ensemble admet un minimum. Posons

$$k = \min\{m \in \mathbb{N}^* \ : \ m > x - 1\}.$$

Supposons d'abord que $x \geq 2$. Comme $k > x - 1$, on a $k - 1 > x - 2 \geq 0$ et donc $k - 1 \in \mathbb{N}^*$. D'après la minimalité de k, on peut déduire que $k - 1 \leq x - 1$, c'est-à-dire que $k \leq x$.
D'autre part, soit $n \in \mathbb{Z}$.

$$n > k \Longrightarrow n \geq k + 1 > (x - 1) + 1 = x \Longrightarrow n > x.$$

De manière équivalente,
$$n \in E_x \Longrightarrow n \leq k.$$
Nous avons montré que $k = \max E_x$.
Si $x \leq 2$, alors choisissons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > 2 - x$, c'est-à-dire $x + n > 2$. D'après la première partie de la preuve, il existe un plus grand entier $\ell \leq x + n$, et alors $k := \ell - n$ est le plus grand entier vérifiant $k \leq x$. $\square$

8. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

THÉORÈME 8.1. *Pour tous $a < b$ il existe $x \in \mathbb{Q}$ tel que $a < x < b$.*

On exprime souvent cette propriété en disant que $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

PREUVE. D'après l'axiome **A**, il existe $q \in \mathbb{N}^*$
$$q(b-a) > 1 \Longleftrightarrow qb - qa > 1 \Longleftrightarrow qb > qa + 1.$$
Alors l'entier $p = \lfloor qa \rfloor + 1$ vérifie
$$qa < p \leq qa + 1 < qb.$$
Finalement, le rationnel p/q vérifie $a < p/q < b$. $\square$

9. Ensemble majoré, minoré, borné

Définition 9.1 (majorant et minorant d'un ensemble).
Soit $E \subset \mathbb{R}$. On dit que
- S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $x \leq a$, on dit que E est majoré. Le nombre a est appelé un majorant de E.
- S'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $x \geq b$, on dit que E est minoré. Le nombre b est appelé un minoant de E.
- S'il existe $c \in [0, +\infty[$ tel que pour tout $x \in E$, $|x| \leq c$, on dit que E est borné. Le nombre c est appelé une borne de E.

Remarque 9.2.
(1) Si E est majoré par a et minoré par b, alors E est borné par $c = \max(|a|, |b|)$. En effet, pour tout $x \in E$, on a
$$-c \leq -|b| \leq b \leq x \leq a \leq |a| \leq c.$$
Réciproquement, s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $|x| \leq c$, alors E est minoré par $-c$ et majoré par c.
(2) Si a est un majorant de E, alors tout $a' \geq a$ est encore un majorant de E.
De même, si b est un minorant de E, alors tout $b' \leq b$ est encore un minorant de E.

Exemples 9.3.
- $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. En effet, tout majorant a de $\mathbb{N}$ vérifierait $a \geq 1 > 0$. D'après l'axiome d'Archimède, pour tout $a > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > a$.

- $E =]0, 1]$. Nous avons déjà montré que cet ensemble n'admettait pas de plus petit élément. Pourtant, il est minoré par 0.

PROPOSITION 9.4.
(i) *m est un minorant de E si et seulement si $-m$ est un majorant de $-E$.*
(ii) *E est minoré si et seulement si $-E$ est majoré.*

PREUVE.
(i) Pour tout $x \in E$, on a $m \leq x$ si et seulement si $-x \geq -m$.
(ii) Conséquence de (i).

□

10. Supremum et infimum d'un ensemble

Définition 10.1 (Supremum).
Soit E une partie de $\mathbb{R}$. Supposons qu'il existe $S \in \mathbb{R}$ qui vérifie :
(i) S est un majorant de E
(ii) Si $x < S$, alors x n'est pas un majorant de E.

Alors S est appelé le *supremum* de E et il est noté $\sup E$.

Remarque 10.2.
En écrivant autrement la définition, $S = \sup E$ est défini par les 2 propriétés
(i) $\forall x \in E,\ x \leq S$.
(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in E : x > S - \varepsilon$.

Exemple 10.3. Montrons que $\sup\,]0, 1[= 1$.

(i) 1 est un majorant de $]0, 1[$ car $\forall x \in]0, 1$, on a $x \leq 1$.
(ii) Si $y < 1$, alors y n'est pas un majorant de $]0, 1[$. En effet,
   - si $y \leq 0$, alors $y < \frac{1}{2} \in]0, 1[$;
   - si $0 < y < 1$, alors $y < \frac{y+1}{2} \in]0, 1[$.

PROPOSITION 10.4. *Si E admet un maximum, alors il admet un supremum et $\sup E = \max E$. En particulier, si E admet un supremum qui n'appartient pas E, alors il n'admet pas de maximum.*

PREUVE.
Par définition, $\max E$ est un majorant de E et $\sup E$ est le plus petit majorant de E donc $\sup E \leq \max E$. D'autre part, $\max E \in E$ donc $\max E \leq \sup E$.

□

Par exemple, posons $E =]0, 1]$. On a $\sup\,]0, 1] = \max\,]0, 1] = 1$.

Pour $E =]0, 1[$, comme $\sup\,]0, 1[= 1 \notin]0, 1[$, on peut en déduire que $]0, 1[$ n'admet pas de maximum.

PROPOSITION 10.5. *Soit E un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors*

$$a \geq \sup E \iff \forall x \in E,\ a \geq x.$$

PREUVE. Supposons que $a \geq \sup E$. Alors pour tout $x \in E,\ a \geq \sup E \geq x$.
Réciproquement, si pour tout $x \in E$, $a \geq x$, alors a est un majorant de E. Comme $\sup E$ est le plus petit majorant de E, on a $\sup E \leq a$. □

Nous pouvons maintenant énoncer le dernier axiome des nombre réels.

Axiome de Bolzano

B Tout partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

PROPOSITION 10.6. *L'axiome de Bolzano implique celui d'Archimède.*

PREUVE. En raisonnant par l'absurde, supposons que l'axiome de Bolzano est vérifié, mais pas l'axiome d'Archimède. Alors il existe $a, b > 0$ tels pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $na \leq b$, c'est-à-dire $n \leq \frac{a}{b}$. L'ensemble $\mathbb{N}^*$ est alors non vide et majoré. L'axiome de Bolzano implique qu'il admet une borne supérieure $N = \sup \mathbb{N}^*$.
Comme N est le plus petit majorant de $\mathbb{N}^*$, $N - 1 < N$ n'est pas un majorant de $\mathbb{N}^*$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $N - 1 < n$. Alors $N < n + 1 \in \mathbb{N}^*$, contredisant le caractère majorant de N. □

PROPOSITION 10.7. *Si F est une partie de $\mathbb{R}$ qui possède un supremum et E une partie non vide telle que $E \subset F$, alors E possède un supremum $\sup E \leq \sup F$.*

PREUVE. Pour tout $x \in E$, on a $x \in F$ donc $x \leq \sup F$. L'ensemble E est donc majoré. D'après l'axiome de Bolzano, il possède un supremum. De plus, $\sup F$ est un majorant de E et comme $\sup E$ est le plus petit majorant de E, on en déduit que $\sup E \leq \sup F$.
Attention, l'inclusion stricte n'implique pas l'inégalité stricte. Par exemple,

$$]0,1[\subsetneq [0,1] \quad \text{et} \quad \sup]0,1[= \sup[0,1],$$

□

La définition de la borne inférieure ou infimum ainsi que ses propriétés sont analogues à celles du supremum.

Définition 10.8 (Infimum). Soit E une partie de $\mathbb{R}$. Supposons qu'il existe $I \in \mathbb{R}$ qui vérifie :

(i) I est un minorant de E
(ii) Si $x > I$, alors I n'est pas un minorant de E.

Alors I est appelé le *infimum* de E, ou encore la *borne inférieure* de E et il est noté $\inf E$.

Remarque 10.9. $\inf E$, s'il existe, est le plus grand minorant de E.

En écrivant autrement la définition, $I = \inf E$ est défini par les 2 propriétés

(i) $\forall x \in E,\ x \geq I$.
(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in E : x < I + \varepsilon$.

Exemple 10.10. Montrons que $\inf\ ]0,1[= 0$.

(i) 0 est un minorant de $]0,1[$ car $\forall x \in]0,1$, on a $x \geq 0$.

(ii) Si $y > 0$, alors y n'est pas un minorant de $]0,1[$. En effet,
- si $y \geq 1$, alors $y > \frac{1}{2} \in]0,1[$;
- si $0 < y < 1$, alors $y > \frac{y+1}{2} \in]0,1[$.

PROPOSITION 10.11.
Si E admet un minimum, alors il admet un infimum et $\inf E = \min E$.

PREUVE.
Par définition, $\min E$ est un minorant de E et $\inf E$ est le plus grand minorant de E donc $\inf E \geq \min E$. D'autre part, $\min E \in E$ donc $\min E \geq \inf E$.

□

Par exemple, pour $E = [0,1[$ on a $\inf\ [0,1[= \min\ [0,1[= 0$.

Pour $E =]0,1[$, comme $\inf\ ]0,1[= 0 \notin\ ]0,1[$, on peut en déduire que $]0,1[$ n'admet pas de plus petit élément.

PROPOSITION 10.12. *Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ admettant un infimum et $a \in \mathbb{R}$. Alors*

$$a \leq \inf E \iff \forall x \in E,\ a \leq x.$$

PREUVE. Supposons que $a \leq \inf E$. Alors pour tout $x \in E,\ a \leq \inf E \leq x$.
Réciproquement, si pour tout $x \in E$, $a \leq x$, alors a est un minorant de E. Comme $\inf E$ est le plus grand minorant de E, on a $\inf E \geq a$. □

PROPOSITION 10.13. *Soit E admet un infimum si et seulement si $-E$ admet un supremum. Dans ce cas, on a $\sup(-E) = -\inf(E)$.*

PREUVE.
Supposons que E admet un infimum et posons $I = \inf E$. Alors pour tout $x \in -E$, on a $-x \in E$ et $-x \geq I$ d'où $x \leq -I$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $x < I + \varepsilon$. On en déduit que $-x \in -E$ et $-x > -I - \varepsilon$. On conclut que $-I$ est le supremum de $-E$. □

PROPOSITION 10.14. *Si F est une partie de $\mathbb{R}$ qui possède un infimum et si E est une partie non vide telle que $E \subset F$, alors $\inf E \geq \inf F$.*

PREUVE. Tout d'abord, remarquons que $E \subset F$ est équivalent à $-E \subset -F$. D'après Proposition 10.13, $-F$ admet un supremum et d'après Proposition 10.14, $\sup(-E) \leq \sup(-F)$. En utilisant encore une fois Proposition 10.13, on obtient $-\inf E \leq -\inf F$, c'est-à-dire $\inf E \geq \inf F$. □

Attention, l'inclusion stricte n'implique pas l'inégalité stricte. Par exemple,

$$]0,1[\subsetneq [0,1] \quad \text{et} \quad \inf]0,1[= \inf[0,1],$$

THÉORÈME 10.15. *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

PREUVE.
Soit E une partie non vide et minorée. Alors $-E$ est non vide et majorée. D'après l'axiome de Bolzano, $-E$ admet une borne supérieure et d'après Proposition 10.13, E admet une borne inférieure.

$\square$

11. Densité des irrationnels dans $\mathbb{R}$

Commençons par montrer l'existence de $\sqrt{2}$ et son irrationalité.

THÉORÈME 11.1.
Il existe un unique nombre réel $c > 0$ tel que $c^2 = 2$. On notera $c = \sqrt{2}$.

*PREUVE.
L'unicité est immédiate puisque si $c > 0$ et $c' > 0$ et $2 = c^2 = c'^2$, alors $c = c'$.
Prouvons maintenant l'existence. Posons $E = \{x \in [0, +\infty[\colon x^2 < 2\}$ et remarquons que $1 \in E$. De plus, il est majoré par 2. En effet, si $x \geq 2$, alors $x^2 \geq 4 > 2$. D'après l'axiome de Bolzano, E admet une borne supérieure. Posons $c = \sup E$ et montrons que $c^2 = 2$. Comme $1 \in E$, on a $c \geq 1$.

Supposons par l'absurde que $c^2 > 2$ et posons $a = \frac{c^2-2}{2c} > 0$. Alors on a

$$(c-a)^2 = c^2 - 2ac + a^2 > c^2 - 2ac = 2.$$

Pour tout $x \in E$, on a $x^2 < 2 < (c-a)^2$, ce qui implique $x < c - a$. Le nombre $c - a$ serait donc un majorant de E strictement plus petit que $c = \sup E$. C'est impossible.
Supposons maintenant par l'absurde que $c^2 < 2$. Par l'axiome d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > \frac{2c+1}{2-c^2}$.

$$\left(c + \frac{1}{n}\right)^2 = c^2 + \frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} \leq c^2 + \frac{2c+1}{n} < 2,$$

autrement dit, $c + \frac{1}{n} \in E$. On obtient une contradiction car $c + \frac{1}{n} > c = \sup E$.
Finalement, on a bien $c^2 = 2$.
On note maintenant $\sqrt{2} = c$ et on remarque que $1 < \sqrt{2}$, puisque $1 \in E$ et $1^2 \neq 2$. De plus, $\sqrt{2} < \sqrt{2}^2 = 2$.

$\square$

THÉORÈME 11.2. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

PREUVE. Supposons maintenant par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Considérons l'ensemble $E = \left\{k \in \mathbb{N}^* \ : \ k\sqrt{2} \in \mathbb{N}\right\}$. E n'est pas vide car il contient q. D'après Corollaire 6.5, il admet donc un plus petit élément. Notons $n = \min E$ et posons $k = n(\sqrt{2} - 1)$. Alors

$$k = n\sqrt{2} - n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad k\sqrt{2} = n(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2} = n\sqrt{2}^2 - n\sqrt{2} = 2n - n\sqrt{2} \in \mathbb{N}.$$

Finalement, $k \in E$ mais $k < n = \min E$, ce qui contredit la minimalité de n. $\square$

COROLLAIRE 11.3. *Pour tous $a < b$ il existe $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $a < y < b$.*

PREUVE. D'après le Théorème 11.1 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. D'après la Proposition 8.1, il existe $x \in \left]\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right[\cap \mathbb{Q}$. On peut supposer que $x \neq 0$, quitte à en choisir un autre.
Alors $\sqrt{2}x \in]a, b[$ et $\sqrt{2}x$ est irrationnel. En effet, si $\sqrt{2}x$ était rationnel, $\sqrt{2} = \dfrac{1}{x} \times \sqrt{2}x$ serait aussi rationnel. □

12. Racine n ième

LEMME 12.1.
(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k.$$

(2) Si $x > 0$ et $y > 0$, alors $x^n = y^n \Longrightarrow x = y$.
(3) Si $x > 0$ et $y > 0$, alors $x^n \geq y^n \Longrightarrow x \geq y$.

PREUVE. (1)

$$\begin{aligned}
(x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k &= \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k}y^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k}y^k - \sum_{k=1}^{n} x^{n-k}y^k \\
&= x^n + \sum_{k=1}^{n-1} x^{n-k}y^k - \left(\sum_{k=1}^{n-1} x^{n-k}y^k + y^n\right) \\
&= x^n - y^n.
\end{aligned}$$

(2) Supposons $x > 0$ et $y > 0$ et $x^n = y^n$. Alors $\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k \geq x^{n-1} > 0$. De plus,

$$0 = x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k \Longrightarrow x - y = 0.$$

(3) En supposant $x^n \geq y^n$ et en répétant en partie la preuve de (2), on a

$$0 \leq x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k \Longrightarrow x - y \geq 0.$$

□

THÉORÈME 12.2.
Pour tout réel $a > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre réel positif c tel que $c^n = a$. On notera $c = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ et on appelle ce nombre racine $n$ième de c.

*PREUVE.

L'unicité est immédiate d'après Lemme 12.1 car si $c > 0$ et $c' > 0$, vérifient $a = c^n = c'^n$, alors $c = c'$.

Prouvons maintenant l'existence. Posons $E = \{x \in [0, +\infty[: x^n < a\}$. Notons que E n'est pas vide, il contient le nombre $t = \frac{a}{a+1}$. En effet, $0 \le t < \min(1, a)$ donc $t^n < t < a$. De plus, si $x > 1 + a$, alors $x^n \ge x > a$. Donc E est majoré par $1 + a$. D'après l'axiome de Bolzano, E admet une borne supérieure. Posons $c = \sup E$ et montrons que $c^n = a$.

Supposons par l'absurde que $c^n > a$ et posons

$$k = \frac{c^n - a}{nc^{n-1}}.$$

Comme $c^n - a < c^n \le nc^n$, on a $k < c$. En appliquant l'inégalité de Bernoulli généralisée donnée par Théorème 5.1, on obtient

$$(c - k)^n \ge c^n - nkc^{n-1} = a.$$

Pour tout $x \in E$, on a $x^n < a \le (c - k)^n$ et d'après Lemme 12.1, $x \le c - k$. Le nombre $c - k < c$ serait alors un majorant de E, ce qui contredirait le fait que $c = \sup E$.

Supposons maintenant par l'absurde que $c^n < a$. Par l'axiome d'Archimède, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m > \frac{n(c+1)^{n-1}}{a-c^n}$. On a, d'après Lemme 12.1,

$$\begin{aligned}
\left(c + \frac{1}{m}\right)^n - c^n &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(c + \frac{1}{m}\right)^{n-1-k} \frac{1}{m^k} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(c + \frac{1}{m}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(c + \frac{1}{m}\right)^{-k} m^{-k} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(c + \frac{1}{m}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (cm + 1)^{-k} \\
&\le \frac{n}{m} \left(c + \frac{1}{m}\right)^{n-1} \\
&\le \frac{n}{m} (c + 1)^{n-1} < a - c^n.
\end{aligned}$$

On a alors obtenu

$$\left(c + \frac{1}{m}\right)^n < a,$$

ce qui veut dire que $c + \frac{1}{m} \in E$. On obtient une contradiction car $c + \frac{1}{m} > c = \sup E$.

Finalement, $c^n = a$. $\square$

Définition 12.3.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$0^{\frac{1}{n}} = 0.$$

et pour tout $a > 0$ et

$$a^{-\frac{1}{n}} := \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}.$$

PROPOSITION 12.4.
Pour tout $a, b > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}.$$

PREUVE.

$$\left(a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n = ab.$$

On conclut par l'unicité de la racine $n$ième.

□

13. L'Inégalité arithmético-géométrique

PROPOSITION 13.1 (Inégalité arithmético-géométrique pour 2 nombres).
Pour tous $p, q \geq 0$, on a

$$\sqrt{pq} \leq \frac{p+q}{2}.$$

PREUVE. On a

$$\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - pq = \frac{1}{4}\left(p^2 + q^2 + 2pq - 4pq\right) = \frac{1}{4}(p-q)^2 \geq 0.$$

On en déduit que

$$pq \leq \left(\frac{p+q}{2}\right)^2,$$

puis que

$$\sqrt{pq} \leq \frac{p+q}{2}.$$

□

Nous pouvons généraliser cette inégalité :

THÉORÈME 13.2 (Cauchy, 1821). *Si $c_1, \ldots, c_n \geq 0$, alors*

$$\sqrt[n]{c_1 \cdots c_n} \leq \frac{c_1 + \cdots + c_n}{n} \tag{13.3}$$

de l'inégalité entre les moyennes géométrique *et* arithmétique *des réels $c_1, \ldots, c_n \geq 0$. De plus, on a égalité si, et seulement si $c_1 = \cdots = c_n$.*

Illustration géométrique : Rappelons deux théorèmes classiques de la *Géométrie* d'Euclide[1] (voir les figures). Premièrement, si l'hypoténuse d'un triangle rectangle est divisée en deux parties p et q par le pied de la hauteur m correspondante du triangle, alors la longueur de la hauteur est égale à $\sqrt{pq}$. Deuxièmement, le sommet du triangle est situé sur le cercle dont l'hypoténuse est un diamètre,[2] et donc de rayon $r = \frac{p+q}{2}$, on a $m \leq r$, et donc

$$\sqrt{pq} \leq \frac{p+q}{2}. \tag{13.4}$$

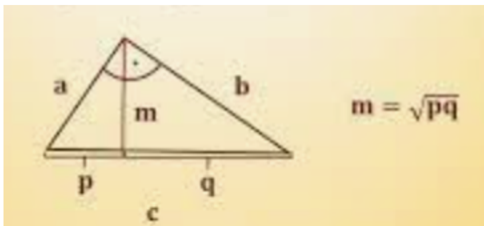


FIGURE 1. Comme les deux petits triangles sont semblables, $\frac{p}{m} = \frac{m}{q}$ d'où $m = \sqrt{pq}$.

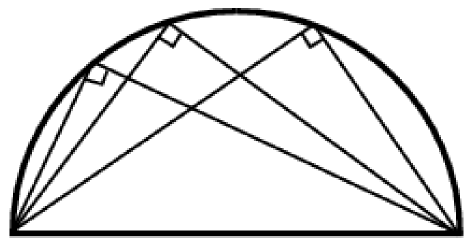


FIGURE 2. Cercle de Thalès

L'inégalité arithmético-géométrique permet de résoudre de nombreux problèmes pratiques de manière élémentaire. Donnons quelques exemples :

Exemples 13.3.

(i) Parmi les rectangles de périmètre P donnée, lequel a la plus grande aire ?

En désignant par x et y les deux cotés, l'aire A est égale à xy, et le périmètre est égale à $2x + 2y$. On a donc

$$A = xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{P}{4}\right)^2 = \frac{P^2}{16},$$

avec égalité si, et seulement si $x = y$. Comme $\frac{P^2}{16}$ est fixé, on conclut que le rectangle d'aire maximale est le carré.

On aurait pu résoudre ce problème en étudiant la fonction $A(x) := x\left(\frac{P}{2} - x\right)$, mais cette méthode simple ne s'appliquera pas facilement aux deux problèmes suivants.

(ii) Parmi les pavés droits de surface S donnée, lequel a le plus grand volumes ?

En désignant par x, y et z les trois cotés, le volume V est égale à xyz, tandis que $S = 2xy + 2yz + 2zx$. On a donc

$$V^2 = (xy)(yz)(zx) \leq \left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^3 = \left(\frac{S}{6}\right)^3 = \frac{S^3}{216},$$

avec égalité si, et seulement si $xy = yz = zx$, c'est-à-dire si le pavé est un cube.

(iii) Par des arguments géométriques, Kepler (1615) a résolu le problème suivant: *parmi tous les cylindres de diamètre D donné, lequel a le plus grand volume V ?*

---

[1] 4e siècle avant notre ère.

[2] C'est un théorème de Thalès.

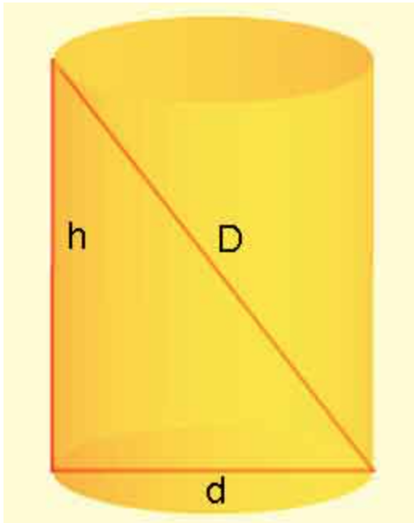
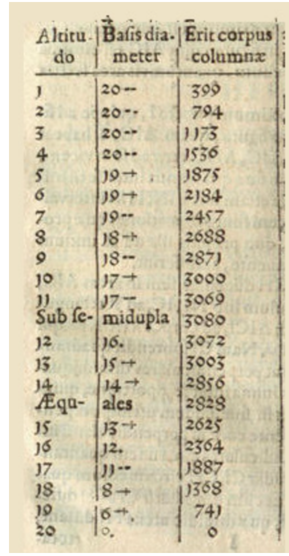


FIGURE 3. On a $D^2 = h^2 + d^2$ par le théorème de Pythagore.



Altitudo	Basis diameter	Erit corpus columnæ
1	20 −	399
2	20 −	794
3	20 −	1173
4	20 −	1536
5	19 +	1875
6	19 +	2184
7	19 −	2457
8	18 +	2688
9	18 −	2871
10	17 +	3000
11	17 −	3069
Sub se-	midupla	3080
12	16.	3072
13	15 +	3003
14	14 +	2856
Æqu-	ales	2828
15	13 +	2625
16	12.	2364
17	11 −	1887
18	8 +	1368
19	6 +.	741
20	0.	0

FIGURE 4. Table de Kepler

Désignons par d le diamètre du disque de base, et par h la hauteur du cylindre ; alors

$$D^2 = h^2 + d^2 \quad \text{et} \quad V = \left(\frac{d}{2}\right)^2 h\pi = \frac{d^2 h\pi}{4} \; ;$$

voir la figure. En appliquant la Théorème 13.2 avec $n = 3$, on a

$$V^2 = \frac{\pi^2}{32} \cdot d^2 \cdot d^2 \cdot (2h^2) \le \frac{\pi^2}{32}\left(\frac{d^2 + d^2 + 2h^2}{3}\right)^3 = \frac{\pi^2}{32}\left(\frac{2D^2}{3}\right)^3 = \frac{\pi^2 D^6}{108},$$

avec égalité si, et seulement si $d^2 = 2h^2$. Par conséquent,

$$V = \frac{\pi D^3}{6\sqrt{3}} \quad \text{si} \quad d = \sqrt{2}h, \quad \text{et} \quad V < \frac{\pi D^3}{6\sqrt{3}} \quad \text{dans les autres cas.}$$

Le volume est donc maximal si $d = \sqrt{2}h$.

Pour démontrer le Théorème 13.2 nous avons besoin de deux lemmes.

LEMME 13.4. *Si $x_1, \dots, x_n > 0$ et $x_1 \cdots x_n = 1$, alors $x_1 + \cdots + x_n \ge n$. De plus, on a égalité seulement si $x_1 = \cdots = x_n = 1$.*

*PREUVE.

Pour $n = 1$ la propriété est trivialement vérifiée, et on a égalité : $x_1 = 1$. Procédant par récurrence, soit $n \ge 2$, et supposons que le résultat est vrai pour $n-1$ nombres. Si $x_1 = \cdots = x_n = 1$, alors $x_1 + \cdots + x_n = n$. Supposons désormais que $x_1, \dots, x_n$ ne sont pas tous égaux à 1, et montrons que $x_1 + \cdots + x_n > n$.

Comme $x_1 \cdots x_n = 1$, il existe deux indices i et j tels que $x_i < 1 < x_j$. Comme les sommes $x_1 + \cdots + x_n$ et produits $x_1 \cdots x_n$ ne changent pas par une permutation des éléments, on peut supposer par symétrie que $x_1 < 1 < x_2$. En appliquant l'hypothèse de récurrence aux $(n-1)$ nombres x_1x_2 et $x_3, \dots, x_n$, on obtient que

$$x_1x_2 + x_3 + \cdots + x_n \ge n - 1.$$

En rajoutant $x_1 + x_2 - x_1x_2$ aux deux membres, on en déduit que

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \geq n - 1 + x_1 + x_2 - x_1x_2 = n + (1 - x_1)(x_2 - 1).$$

On conclut en observant que le $(1 - x_1)(x_2 - 1) > 0$ par notre hypothèse $x_1 < 1 < x_2$. □

LEMME 13.5. *Si $x_1, \ldots, x_n > 0$ et $x_1 \cdots x_n > 1$, alors $x_1 + \cdots + x_n > n$.*

*PREUVE.
Remplaçons x_n par le nombre plus petit

$$x'_n := \frac{1}{x_1 \cdots x_{n-1}} \, ;$$

alors $0 < x'_n < x_n$ et $x_1 \cdots x_{n-1}x'_n = 1$. En appliquant le Lemme 13.4 à $x_1, \ldots, x_{n-1}, x'_n$, on obtient que

$$x_1 + \cdots + x_{n-1} + x'_n \geq n.$$

Comme $x_n > x'_n$, on conclut que

$$x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n > n.$$

□

*PREUVE DU THÉORÈME 13.2. Si $c_1 = \cdots = c_n$, alors on a égalité. Sinon, on a

$$s := \frac{c_1 + \cdots + c_n}{n} > 0,$$

et il faut montrer que $c_1 \cdots c_n < s^n$. En raisonnant par l'absurde, supposons que $c_1 \cdots c_n \geq s^n$ ou, de manière équivalente,

$$\frac{c_1}{s} \cdots \frac{c_n}{s} \geq 1.$$

Comme $c_1, \ldots, c_n$ ne sont pas tous égaux, ces fractions ne sont pas toutes égales non plus. Alors on déduit des Lemmes 13.4 et 13.5 que

$$\frac{c_1}{s} + \cdots + \frac{c_n}{s} > n,$$

contredisant la définition de s. □

Nous terminerons par l'observation que les inégalités arithmético-géométrique et de Bernoulli sont équivalentes.

L'inégalité arithmético-géométrique implique l'inégalité de Bernoulli.

PREUVE.
Soit $x \geq -1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $1 + nx < 0$, on a

$$(1 + x)^n \geq 0 > 1 + nx.$$

On suppose maintenant $1 + nx \geq 0$ et on pose $c_1 = 1 + nx, c_2 = \cdots = c_n = 1$. On a alors $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 1 + nx + n - 1 = n(1 + x)$ et l'inégalité arithmético-géométrique donne :

$$(1 + nx)^{\frac{1}{n}} \leq (1 + x).$$

En appliquant les puissances $n$ièmes, on obtient

$$1 + nx \leq (1 + x)^n.$$

□

L'inégalité de Bernoulli implique l'inégalité arithmétco-géométrique.

*PREUVE.

En posant

$$s_n := \frac{c_1 + \cdots + c_n}{n},$$

il faut montrer que $s_n^n \geq c_1 \cdots c_n$. Pour $n = 1$ on a une égalité : $s_1 = c_1$. Si $n \geq 2$ et $s_{n-1}^{n-1} \geq c_1 \cdots c_{n-1}$, alors l'application de l'inégalité de Bernoulli montre que[3]

$$s_n^n = s_{n-1}^n \left(\frac{s_n}{s_{n-1}}\right)^n \geq s_{n-1}^n \left(1 + n\left(\frac{s_n}{s_{n-1}} - 1\right)\right) = s_{n-1}^{n-1}(ns_n - (n-1)s_{n-1}).$$

Comme

$$ns_n - (n-1)s_{n-1} = (c_1 + \cdots + c_n) - (c_1 + \cdots + c_{n-1}) = c_n,$$

on conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence que

$$s_n^n \geq s_{n-1}^{n-1} c_n \geq c_1 \cdots c_n. \qquad \square$$

[3]On suit Maligranda, L. (2012). The AM-GM inequality is equivalent to the Bernoulli inequality. *Math. Intelligencer*. 34(1): 1–2.