

On considère un \mathbb{R} -espace vectoriel noté E .

Voici quelques exemples de \mathbb{R} -espaces vectoriels :

- \mathbb{R}, \mathbb{R}^2 et plus généralement $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$;
- $E = \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$: l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n , à coefficients dans \mathbb{R} ;
- $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$: l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

1. Définition

Définition 1.1. – Une application $\| \cdot \| : E \mapsto \mathbb{R}^+$ est appelée *norme sur E* si elle vérifie les propriétés suivantes : $\forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}$,

- i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
- ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Le nombre $\|x\|$ est appelée *norme de x* .

Exemples : La valeur absolue est une norme sur \mathbb{R} .

Trois exemples de normes sur $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, sont donnés dans le prochain paragraphe. Des exemples de normes sur $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ et sur $\mathcal{C}^0([0, 1])$ sont donnés respectivement dans les exercices 7 et 8 de la feuille 1.

Définition 1.2 (E.v.n.). L'espace vectoriel E muni d'une norme $\| \cdot \|$ est appelé *espace vectoriel normé*. On le notera $(E, \| \cdot \|)$.

2. Les normes usuelles sur \mathbb{R}^n

On considère dans ce paragraphe le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^n avec $n \geq 2$.

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad ; \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad ; \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

PROPOSITION 2.1. : *Les trois applications $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sont des normes sur \mathbb{R}^n .*

DÉMONSTRATION. Clairement, ces trois applications sont à valeurs dans \mathbb{R}^+ .

Montrons que $\| \cdot \|_1$ est une norme, autrement dit, que les trois propriétés de la définition 1.1 sont vérifiées.

Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

i) Rappelons qu'une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous ces nombres sont nuls.

$$\begin{aligned} \|x\|_1 = 0 &\iff \sum_{i=1}^n |x_i| \iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, |x_i| = 0 \\ &\iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i = 0 \iff x = 0. \end{aligned}$$

ii) On a $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$, de sorte que

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^n (|\lambda| |x_i|) = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right) = |\lambda| \|x\|_1.$$

iii) Rappelons que d'après l'inégalité triangulaire dans \mathbb{R} , pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|.$$

On a alors

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Montrons maintenant que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme. Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

i)

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty = 0 &\iff \max_{i=1, \dots, n} |x_i| = 0 \iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, |x_i| = 0 \\ &\iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i = 0 \iff x = 0. \end{aligned}$$

ii)

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |\lambda x_i| = \max_{i=1, \dots, n} |\lambda| |x_i| = |\lambda| \max_{i=1, \dots, n} |x_i| = |\lambda| \|x\|_\infty.$$

iii) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \max_{i=1, \dots, n} |x_i| + \max_{i=1, \dots, n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

On a alors

$$\|x + y\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i + y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Le cas de la norme euclidienne sera traité en TD (voir Exercice 2, Feuille 1). ■

PROPOSITION 2.2. : Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &\leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty; \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty; \\ \|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Posons $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Comparons d'abord les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Il existe $i_x \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\|x\|_\infty = |x_{i_x}|$. On a alors

$$\|x\|_\infty = |x_{i_x}| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1.$$

De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|x_i| \leq \|x\|_\infty$. On obtient alors

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sum_{i=1}^n \|x\|_\infty = n \|x\|_\infty.$$

Comparons maintenant les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Soit $i_x \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\|x\|_\infty = |x_{i_x}|$. On a alors

$$\|x\|_\infty^2 = |x_{i_x}|^2 \leq \sum_{i=0}^n |x_i|^2 = \|x\|_2^2.$$

De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|x_i| \leq \|x\|_\infty$. On obtient alors

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n \|x\|_\infty^2 = n\|x\|_\infty^2.$$

Nous avons obtenu les inégalités

$$\|x\|_\infty^2 \leq \|x\|_2^2 \leq n\|x\|_\infty^2$$

ce qui est équivalent, en prenant les racines carrées, à

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

Le troisième encadrement sera traité en TD (voir Exercice 3, Feuille 1). ■

3. Equivalence de normes

Définition 3.1. Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E . On dit que $\|\cdot\|_1$ est *équivalente* à $\|\cdot\|_2$ s'il existe deux constantes réelles $a, b > 0$ telles que :

$$\forall x \in E, \quad a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$$

On note alors $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

PROPOSITION 3.2. : Cette relation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E .

DÉMONSTRATION. :

- **Réflexivité** : $\forall x \in E$, on choisit $a = b = 1$: $\|x\|_1 \leq \|x\|_1 \leq \|x\|_1$.
- **Symétrie** : On suppose qu'il existe $a, b > 0$ tels que pour tout $x \in E$, $a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$, alors $\frac{1}{b}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \frac{1}{a}\|x\|_1$.
- **Transitivité** : On suppose qu'il existe $a, b, c, d > 0$ tels que pour tout $x \in E$, $a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$ et $c\|x\|_3 \leq \|x\|_2 \leq d\|x\|_3$.
Alors $ac\|x\|_3 \leq \|x\|_1 \leq bd\|x\|_3$. ■

4. Boules unité associée à une norme

Définition 4.1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn.

- L'ensemble

$$B(0, 1) = \{x \in E : \|x\| < 1\}$$

est appelée boule unité ouverte.

- L'ensemble

$$B'(0, 1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

est appelée boule unité fermée.

5. Produit cartésien d'espaces vectoriels normés

Soient E et F deux espaces vectoriels munis respectivement des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. On note

$$G = E \times F = \{z = (x, y), x \in E; y \in F\}$$

le produit cartésien de ces deux espaces et on définit l'application :

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : G &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ z = (x, y) &\longmapsto \max(\|x\|_1, \|y\|_2). \end{aligned}$$

PROPOSITION 5.1. *L'application $\|\cdot\|$ définie ci-dessus est une norme sur G .*

DÉMONSTRATION. Soient $z = (x, y)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{i) } \|z\| = 0 \iff \max(\|x\|_1, \|y\|_2) = 0 \iff \begin{cases} \|x\|_1 = 0 \iff x = 0 \\ \|y\|_2 = 0 \iff y = 0 \end{cases} \iff z = 0.$$

$$\text{ii) } \|\lambda z\| = \max(\|\lambda x\|_1, \|\lambda y\|_2) = |\lambda| \max(\|x\|_1, \|y\|_2) = |\lambda| \|z\|.$$

iii) Soient un deuxième élément $z' = (x', y') \in G$. Vérifions l'inégalité triangulaire.

$$\|z + z'\| = \|(x + x', y + y')\| = \max(\|x + x'\|_1, \|y + y'\|_2)$$

$$\text{Or } \begin{cases} \|x + x'\|_1 \leq \|x\|_1 + \|x'\|_1 \leq \|z\| + \|z'\| \\ \|y + y'\|_2 \leq \|y\|_2 + \|y'\|_2 \leq \|z\| + \|z'\| \end{cases}$$

Finalement, on a bien $\|z + z'\| \leq \|z\| + \|z'\|$.

