## SÉRIES ENTIÈRES

### 1. Définition et rayon de convergence

Définition 1.1 (Série entière). On appelle série entière une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n\geq 0} f_n, \quad f_n(x) = a_n x^n$$

où $(a_n)_n$ est une suite numérique. On la notera $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Exemple 1.2.

(1) $\forall n \geq 0,\ a_n = 1 : \sum_{n\geq 0} x^n;$

(2) $\forall n \geq 1,\ a_n = \frac{1}{n} : \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n;$

(3) $\forall n \geq 0,\ a_n = n+1 : \sum_{n\geq 0} (n+1)x^n.$

(4) $\forall n \geq 0,\ a_n = \frac{1}{n!} : \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}.$

LEMME 1.3 (Lemme d'Abel). *Soit $r > 0$ un nombre réel tel que la suite $(|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.*

*Alors, pour tout $x$ tel que $|x| < r$, la série $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$ converge.*

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| r^n \leq M$. Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < r$ :

$$|a_n||x|^n = |a_n| r^n \left(\frac{|x|}{r}\right)^n \leq M \left(\frac{|x|}{r}\right)^n.$$

Puisque $\frac{|x|}{r} < 1$, la série converge. ∎

Définition 1.4 (rayon de convergence). Pour une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Soit

$$X = \{r \geq 0 \ : \ \text{la suite } (a_n r^n)_n \text{ est bornée } \}.$$

Cet ensemble contient le nombre $r = 0$, il n'est donc pas vide. On définit le rayon de convergence $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ de la série entière par :

- Si $X$ est majoré, $R = \sup X$.
- Si $X$ n'est pas majorée, $R = +\infty$.

Exercice : Vérifier que $X$ est un intervalle et

$$]-R, R[ \subset X \subset [-R, R].$$

THÉORÈME 1.5. *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière et $R$ son rayon convergence.*

- *Si $|x| < R$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge absolument. En particulier, la suite $(a_n x^n)_n$ est bornée.*

- *Si $|x| > R$, alors la suite $(a_n x^n)_n$ n'est pas bornée et donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge grossièrement.*

*De plus, $R$ est le seul nombre vérifiant les deux conditions suivantes :*

i) *Si $|x| < R$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge.*
ii) *Si $|x| > R$, alors la suite $(a_n x^n)_n$ diverge.*

DÉMONSTRATION.

- Si $|x| < R$, $|x|$ n'est pas un majorant de $X$, donc il existe $r \in X$ tel que $|x| < r$. D'après le lemme d'Abel, la série converge absolument.
- Si $|x| > R$, $|x| \notin X$, donc la suite $(a_n x^n)_n$ n'est pas bornée.

Supposons maintenant que $R'$ est un nombre vérifiant

- Si $|x| < R'$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge.
- Si $|x| > R'$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge.

Supposons par l'absurde que $R' < R$. Soit $x$ tel que $R' < |x| < R$. Comme $|x| < R$ la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge (absolument) et comme $|x| > R'$ la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge. Ce n'est pas possible.

Supposons par l'absurde que $R < R'$. Soit $x$ tel que $R < |x| < R'$. Comme $|x| < R'$ la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge et comme $|x| > R$ la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge. Ce n'est pas possible. On a alors $R = R'$. ■

Définition 1.6 (Intervalle de convergence). L'ensemble $]-R, R[$ s'appelle intervalle de convergence de la série.

PROPOSITION 1.7 (Règle de d'Alembert). *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$, $a_n \neq 0$ et*

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to l$$

*Alors $R = \dfrac{1}{l}$.*

*Si $l = 0$, $R = +\infty$. Si $l = +\infty$, $R = 0$.*

DÉMONSTRATION. Pour $x \in \mathbb{R}$, considérons la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$ avec $u_n = |a_n x^n|$ et appliquons lui la règle de d'Alembert pour les séries numériques.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| \to l|x|.$$

- Si $|x| < \dfrac{1}{l}$, alors la limite est $< 1$, $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$ converge donc $R \geq \dfrac{1}{l}$.
- Si $|x| > \dfrac{1}{l}$, alors la limite est $> 1$, $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$ diverge donc $R \leq \dfrac{1}{l}$.

■

PROPOSITION 1.8 (Règle de Cauchy). *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$, $a_n \neq 0$ et*

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \to l$$

*Alors $R = \dfrac{1}{l}$.*

*Si $l = 0$, $R = +\infty$. Si $l = +\infty$, $R = 0$.*

DÉMONSTRATION. Pour $x \in \mathbb{R}$, considérons la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$ avec $u_n = |a_n x^n|$ et appliquons lui la règle de Cauchy pour les séries numériques.

$$u_n^{\frac{1}{n}} = |a_n|^{\frac{1}{n}}|x| \to l|x|.$$

- Si $|x| \leq \dfrac{1}{l}$, alors la limite est $< 1$, $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$ converge donc $R \geq \dfrac{1}{l}$.
- Si $|x| \geq \dfrac{1}{l}$, alors la limite est $> 1$, $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$ diverge donc $R \leq \dfrac{1}{l}$.

■

PROPOSITION 1.9 (Formule d'Hadamard). *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière. On note $L = \limsup\{|a_n|^{\frac{1}{n}}|\}$. Alors $R = \frac{1}{L}$.*

## 2. Convergence

THÉORÈME 2.1. *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.*

- *Pour tout $0 \leq r < R$, la série est normalement convergente sur $[-r, r]$.*
- *La fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $]-R, R[$.*

DÉMONSTRATION.

- Soit $0 \leq r < R$. Pour tout $x \in [-r, r]$, $|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$. La série $\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n$ converge puisque $r < R$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto a_n x^n$ est continue sur $]-R, R[$. Soit $x_0 \in ]-R, R[$. Soit $r$ tel que $|x_0| < r < R$. Comme la convergence est normale, donc uniforme, sur $[-r, r]$, la somme de la série est continue sur $[-r, r]$ et en particulier au point $x_0$.

■

## 3. Opération sur les séries entières

PROPOSITION 3.1 (Somme).

*Soient deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ de rayons de convergence respectifs $R_1$ et $R_2$. On appelle somme de ces deux séries entière la nouvelle série $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n$.*

*La somme a un rayon de convergence $R \geq \min(R_1, R_2)$. De plus, pour tout $x \in ]-R, R[$,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

*Si $R_1 \neq R_2$, alors $R = \min(R_1, R_2)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $x$ tel que $|x| < R$. Les deux séries, $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ convergent absolument, donc la somme converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

On en déduit que $R \geq \min(R_1, R_2)$.

Supposons maintenant $R_1 \neq R_2$, par exemple $R_1 < R_2$. On a montré que $R \geq R_1$.

Supposons par l'absurde que $R > R_1$ et considérons $x$ tel que $R_1 < |x| < \min(R, R_2)$. On aurait alors :

- $|x| > R_1$, donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge,
- $|x| < R_2$, donc la série $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ converge
- $|x| < R$, donc la série $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n$ converge.

C'est impossible car

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n - \sum_{n\geq 0} b_n x^n.$$

$\blacksquare$

PROPOSITION 3.2 (Produit de Cauchy).

*Soient deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ de rayons de convergence respectifs $R_1$ et $R_2$. On appelle produit de ces deux séries entières la nouvelle série entière $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$, avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.*

*Le produit a un rayon de convergence $R \geq \min(R_1, R_2)$. De plus, pour tout $x \in ]-R, R[$,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right).$$

DÉMONSTRATION. Le produit correspond au produit de Cauchy des deux séries, en effet :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(a_k x^k b_{n-k} x^{n-k}\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n.$$

Soit $x$ tel que $|x| < R$. Les deux séries, $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ convergent absolument donc le produit de Cauchy de ces deux séries converge absolument . On en déduit que $R \geq \min(R_1, R_2)$ et que pour tout $x \in ]-R, R[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

$\blacksquare$

## 4. Dérivées

THÉORÈME 4.1.
*Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *de rayon de convergence* $R > 0$. *Alors la série* $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$ *a également pour rayon de convergence* $R$.

*On pose* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. *La fonction* $f$ *est dérivable sur* $]-R, R[$ *et, pour tout* $x \in ]-R, R[$,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n.$$

DÉMONSTRATION. Notons $R'$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$. Supposons par l'absurde que $R < R'$ et considérons un nombre $r$ tel que $R < r < R'$. Par définition du rayon de convergence, la suite $((n+1)a_{n+1}r^n)_n$ est bornée. C'est à dire qu'il existe $M \geq 0$ tel que, pour $n \in \mathbb{N}$, $|(n+1)a_{n+1}r^n| \leq M$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n r^n| \leq r|na_n r^{n-1}| \leq rM.$$

La suite $(a_n r^n)_n$ est donc également bornée et par définition du rayon de convergence, $r \leq R$. C'est une contradiction avec $R < r < R'$.

Supposons par l'absurde que $R' < R$ et considérons deux nombres $r$ et $\rho$ tels que $R' < r < \rho < R$. La suite $(a_n\rho^n)_n$ est bornée. Il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n\rho^n| \leq M$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|(n+1)a_{n+1}r^n| = |a_{n+1}\rho^{n+1}|\frac{1}{\rho}(n+1)\left(\frac{r}{\rho}\right)^n \leq \frac{M}{\rho}(n+1)\left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

La suite $\left((n+1)\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\right)_n$ tend vers 0, donc elle est bornée. On en déduit que $((n+1)a_{n+1}r^n)_n$ est bornée donc que $r \leq R'$. C'est une contradiction avec $R' < r$.
Conclusion : $R' \geq R$.

Soit maintenant un nombre $r$ tel que $0 \leq r < R$. Les deux séries convergent normalement, donc uniformément sur $[-r, r]$. D'après le théorème sur la convergence uniforme et dérivation terme à terme, la fonction $f$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle et, pour tout $x \in [-r, r]$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n.$$

Ce résultat est encore valable sur $\cup_{0<r<R}[-r, r] = ]-R, R[$. ■

THÉORÈME 4.2.
*Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *de rayon de convergence* $R > 0$. *Alors la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{a_{n-1}}{n}x^n$ *a également pour rayon de convergence* $R$. *On pose*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n.$$

*La fonction $F$ est dérivable sur $]-R,R[$ et, pour tout $x\in]-R,R[$,*

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt.$$

*Autrement dit, $F$ est la primitive de $f$ qui s'anule en $0$.*

DÉMONSTRATION. On pose $b_0=0$ et $b_n=\frac{a_{n-1}}{n}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $R'$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}b_nx^n=\sum_{n\geq 1}\frac{a_{n-1}}{n}x^n$. D'après le théorème précédent, la série entière $\sum_{n\geq 0}(n+1)b_{n+1}x^n=\sum_{n\geq 0}a^nx^n$ a pour rayon de convergence $R'$. Donc $R=R'$. De plus, pour tout $x\in]-R,R[$, $F'(x)=f(x)$ et comme $F(0)=b_0=0$, $F$ est la primitive de $f$ qui s'annule en $0$. ■

THÉORÈME 4.3. *Soit $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ de rayon de convergence $R>0$. On pose $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$. Alors, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ :*

(i) *La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+k)!}{n!}a_{n+k}x^n$ a également pour rayon de convergence $R$.*

(ii) *La fonction $f$ est $k$ fois dérivable sur $]-R,R[$ et, pour tout $x\in]-R,R[$,*

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+k)!}{n!}a_{n+k}x^n.$$

*En particulier : $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$,*

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0).$$

DÉMONSTRATION. Raisonnons pas récurrence sur $k$. Nous avons déjà démontré le résultat pour $k=1$. Supposons le vrai pour $k$ et considérons la série entière $\sum_{n\geq 0}b_nx^n$ avec

$$b_n=\frac{(n+k)!}{n!}a_{n+k}.$$

Par hypothèse, cette série a pour rayon de convergence $R$, $f$ est $k$ fois dérivable et, pour tout $x\in]-R,R[$,

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n.$$

D'après Théorème 4.1, la série entière $\sum_{n\geq 0}(n+1)b_{n+1}x^n$ a pour rayon de convergence $R$, $f^{(k)}(x)$ est dérivable (c'est à dire $f$ est $k+1$ fois dérivable) et, pour tout $x\in]-R,R[$,

$$f^{(k+1)}(x)=(f^{(k)})'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)!}{n!}a_{n+k+1}x^n.$$

Au point $x=0$, tous les termes de la somme s'annulent, sauf celui de rang $n=0$. L'égalité s'écrit :

$$f^{(k+1)}(0)=k!a_k.$$

■

## 5. Fonctions développables en séries entières

Définition 5.1. Soit $f$ une fonction définie sur un sous-ensemble $E$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On dit qu'elle développable en série entière sur $]-r, r[$ si $]-r, r[\subset E$ et s'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ tel que, pour tout $x \in ]-r, r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

PROPOSITION 5.2.

- *Supposons que $f$ soit développable en série entière sur $]-r, r[$.*

  *Alors, $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à $r$ et pour tout $x \in ]-r, r[$,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

- *Réciproquement, supposons que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et que, pour tout $x \in ]-r, r[$,*

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \to_{N\to+\infty} f(x).$$

  *Alors, le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est supérieur à $r$, $f$ est développable en série entière sur $]-r, r[$ et pour tout $x \in ]-r, r[$,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

DÉMONSTRATION.

- Par hypothèse, il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $\geq r > 0$ tel que, pour $x \in ]-r, r[$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

  . On a vu que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

- Trivial par définition.

■

THÉORÈME 5.3. *Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$, $r > 0$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in ]-r, r[,\ \ |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

*Alors $f$ est développable en série entière sur* $]-r,r[$*et, pour tout* $x\in]-r,r[$,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

DÉMONSTRATION. La formule de Taylor-Lagrange donne : pour tout $N\in\mathbb{N}$, et pour tout $x\in]-r,r[$, il existe $\theta\in]0,1[$ tel que :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(N+1)}(\theta x)}{(N+1)!}x^{N+1}.$$

Mais, en utilisant l'hypothèse,

$$\left|\frac{f^{(N+1)}(\theta x)}{(N+1)!}x^{N+1}\right|\le M\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Le terme de droite tend vers $0$ quand $N$ tend vers $+\infty$. ■

## 6. Développement en séries entières de fonctions usuelles

PROPOSITION 6.1. *Les séries entières suivantes ont pour rayon de convergence $R=1$ et leur somme est donnée par : pour tout $x\in]-1,1[$ :*

1-
$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n.$$

2-
$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n.$$

3-
$$\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}.$$

4-
$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^{2n}.$$

5-
$$-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}.$$

6-
$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

7-
$$\arctan x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

PROPOSITION 6.2. *Les séries entières suivantes ont pour rayon de convergence $R = +\infty$ et leur somme est donnée par, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :*

8-
$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

9-
$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

10-
$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

11-
$$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

12-
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

DÉMONSTRATION. 8- Posons $f(x) = e^x$. La fonction $f$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = e^x$. En particulier, $f^{(n)}(0) = 1$. Pour tout $r > 0$ et pour tout $x \in ]-r, r[$, on a

$$|e^x| \leq e^{|x|} \leq e^r.$$

Grâce au théorème 5.3., on obtient que le rayon de convergence est $R = +\infty$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

9- Posons $g(x) = \sin x$. La fonction $g$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x$ et $g^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |g^{(n)}(x)| \leq 1.$$

De plus, $g^{(2n)}(0) = (-1)^n \sin 0 = 0$ et $g^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \cos 0 = (-1)^n$

Grâce au théorème 5.3., le rayon de convergence est $R = +\infty$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

10- On dérive 9-.

11- C'est la somme de $e^x/2$ et de $-e^{-x}/2$. Le rayon de convergence des deux séries est $+\infty$, donc le rayon de convergence de la somme est $+\infty$. De plus,

$$\begin{aligned}\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{2}\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.\end{aligned}$$

12- On dérive 11-.

■

PROPOSITION 6.3 (Développement de $f(x) = (1+x)^\alpha$).
*Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in ]-1,1[$, on a :*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n.$$

DÉMONSTRATION. La fonction $f$ est l'unique solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x), \quad f(0) = 1.$$

Cherchons la solution de ce système sous forme de série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec un rayon de convergence $R$ que l'on déterminera.

On a

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x) =& (1+x)\sum_{n=1} n a_n x^{n-1}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \qquad .\\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n.\\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}((n+1)a_{n+1} + n a_n)x^n.\end{aligned}$$

En identifiant les deux séries :

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}((n+1)a_{n+1} + n a_n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha a_n x^n,$$

et en tenant compte de la condition initiale $f(0) = 1$, on obtient :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1)a_{n+1} + na_n = \alpha a_n \end{cases}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \dfrac{\alpha - n}{n+1} a_n \end{cases}$$

et finalement, par récurrence, on trouve :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} \end{cases}$$

- Cas où $\alpha \in \mathbb{N}$ :
  Pour tout $n \geq \alpha + 1$, on a $a_n = 0$.
  Pour tout $n \in \{0, \cdots, \alpha\}$, $a_n = \dfrac{\alpha!}{n!(\alpha - n)!}$. On retrouve la formule du binôme de Newton :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\alpha} \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!} x^n.$$

- Cas où $\alpha \notin \mathbb{N}$ : Pour tout $n \geq \alpha$, $a_n \neq 0$ et

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| = \frac{n - \alpha}{n+1} \to_{n \to +\infty} 1.$$

  Le rayon de convergence de la série entière est donc $R = 1$ et pour tout $x \in ]-1, 1[$,

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n.$$

■

## 7. Théorème de convergence radiale d'Abel

THÉORÈME 7.1. *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *Notons* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *pour tout* $x \in ]-R, R[$.

*Supposons que la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ *converge. Alors,*

$$f(x) \to_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

DÉMONSTRATION. Supposons dans un premier temps que $R = 1$ et $\sum_{n\geq 0} a_n = 0$. Montrons que

$$f(x) \to_{x\to 1^-} 0.$$

Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$. On a, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in ]0,1[$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n x^n &= a_0 + \sum_{n=1}^{N} (S_n - S_{n-1}) x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{N} S_n x^n - \sum_{n=1}^{N} S_{n-1} x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{N} S_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} S_n x^{n+1} \\
&= S_0 + \sum_{n=1}^{N} S_n x^n - \sum_{n=1}^{N} S_n x^{n+1} - S_0 x + S_N x^{N+1} \\
&= S_0 - S_0 x + \sum_{n=1}^{N} S_n (x^n - x^{n+1}) + S_N x^{N+1} \\
&= (1-x) S_0 + \sum_{n=1}^{N} (1-x) S_n x^n + S_N x^{N+1} \\
&= \sum_{n=0}^{N} (1-x) S_n x^n + S_N x^{N+1}.
\end{aligned}$$

On a

$$|S_N x^{N+1}| \leq |S_N|.$$

On fait tendre $N$ vers $+\infty$, comme la suite $(S_N)_N$ tend vers $0$, on a $S_N x^{N+1} \to 0$.

$$f(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|S_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= (1-x)\left|\sum_{n=0}^{N} S_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} S_n x^n\right| \\
&\leq (1-x)\left|\sum_{n=0}^{N} S_n x^n\right| + (1-x)\sum_{n=N+1}^{+\infty} |S_n| x^n \\
&\leq (1-x)\left|\sum_{n=0}^{N} S_n x^n\right| + (1-x)\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2} x^n \\
&= (1-x)\left|\sum_{n=0}^{N} S_n x^n\right| + (1-x)\frac{\varepsilon}{2} x^{N+1}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\
&= (1-x)\left|\sum_{n=0}^{N} S_n x^n\right| + \frac{\varepsilon}{2} x^{N+1} \\
&\leq (1-x)\sum_{n=0}^{N} |S_n| + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Comme $1 - x \to 0$ quand $x \to 1^-$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour $x \in ]1-\eta, 1[$,

$$(1-x)\sum_{n=0}^{N} |S_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $x \in ]1-\eta, 1[$, on a donc $|f(x)| < \varepsilon$. Ceci finit de démontrer que $f(x) \to_{x \to 1^-} 0$.

Pour le cas général, posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = a_n R^n$ et $b_0 = -\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Considérons la série entière $g(y) = \sum_{n \geq 0} b_n y^n$. Elle vérifie les hypothèses du premier cas car

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = 0$$

et son rayon de convergence est égal à $1$ car

$$\sum b_n y^n = \sum a_n (Ry)^n$$

converge si $|Ry| < R \iff |y| < 1$, diverge si $|Ry| > R \iff |y| > 1$.

Pour $x \in ]-R, R[$ :

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \left(\frac{x}{R}\right)^n \\
&= a_0 - b_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \left(\frac{x}{R}\right)^n \\
&= a_0 - b_0 + g\left(\frac{x}{R}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n + g\left(\frac{x}{R}\right) \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n R^n + g\left(\frac{x}{R}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n + g\left(\frac{x}{R}\right).
\end{aligned}$$

D'après ce qui précède,

$$g(y) \to_{y \to 1^-} 0.$$

On en déduit que

$$f(x) \to_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

■

## 8. Exponentielle complexe

On étend la définition des séries entières à la variable complexe $z$ en considérant la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Le rayon de convergence $R$ est défini et calculé de la même manière.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série $\sum_{n \geq 0} |a_n z^n|$ converge. ca implique que la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge.

On définit le disque de convergence $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < R\}$.

La série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. Donc la série est convergente sur tout $\mathbb{C}$. On définit l'exponentielle complexe par

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

D'àprès la proposition 6.2, elle coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la fonction exponentielle connue.

En identifiant les développements en série entière, on retrouve les identités :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$