Séries numériques

1. Définitions et premières propriétés

Définition 1.1. Soit $(u_n)_{n\geq p}$ une suite numérique. On appelle série numérique de terme général u_n la suite $(S_k)_{k\geq P}$ définie par

$$S_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \sum_{n=p}^{k} u_n.$$

En général, la série est notée $\sum_{n\geq p} u_n$. Pour chaque $k \geq p$, le nombre $S_k = \sum_{n=p}^{k} u_n$ est appelé somme partielle d'ordre k de la série. La suite $(S_k)_{k\geq p}$ est donc la suite des sommes partielles.

Exemples :

- $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_k = \sum_{n=0}^{k} 1 = k+1$;
- $u_n = n, n \in \mathbb{N}$, $S_k = \sum_{n=0}^{k} n = k(k+1)/2$;

Voici un autre exemple important : Les séries géométriques, elles sont de la forme $\sum_{n\geq 0} a^n$. Le nombre $a \in \mathbb{R}$ est appelé raison de la série. Si $a = 1$, on a $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on retrouve notre premier exemple.

Supposons $a \neq 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S_k = \sum_{n=0}^{k} u_n = \sum_{n=0}^{k} a^n$. On a :

$$(a-1)S_k = aS_k - S_k = a\sum_{n=0}^{k} a^n - S_k = \sum_{n=0}^{k} a^{n+1} - S_k = S_k + a^{k+1} - 1 - S_k = a^{k+1} - 1.$$

$$\text{On obtient :} \quad S_k = \frac{a^{k+1}-1}{a-1} = \frac{1-a^{k+1}}{1-a}.$$

2. Convergence

Définition 2.1. On dit qu'une série converge si la suite de ses sommes partielles converge. Autrement dit, en reprenant les notations de la définition 1.1 :

On dit que la **série** $\sum_{n\geq p} u_n$ est convergente si la suite $(S_k)_{k\geq p}$ est convergente. Dans ce cas, on note

$$\sum_{n=p}^{+\infty} u_n = \lim_{k\to+\infty} S_k$$

et ce nombre est appelé **somme** de la série.

Remarque 2.2. La convergence de la série ne dépend pas des premiers termes. Autrement dit pour tout $q > p$, $\sum_{n\geq p} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n\geq q} u_n$. Dans ce cas,

$$\sum_{n=p}^{+\infty} u_n = \sum_{n=p}^{q-1} u_n + \sum_{n=q}^{+\infty} u_n.$$

Définition 2.3. On dit qu'une série est divergente si elle n'est pas convergente.

Attention à ne pas confondre la convergence de la série, c'est à dire celle de la suite $(S_k)_{k\geq p}$, et celle de la suite $(u_n)_{n\geq p}$! *Exemples*

- La série de terme général $u_n = 1$ diverge : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S_k = k+1$. la suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Remarquez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente !

- La série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$, autrement dit la série harmonique, diverge, en effet, la suite $S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$. Remarquez que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 !

PROPOSITION 2.4. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a^n$ la série géométrique de raison $a \in \mathbb{R}$.*

- *Si $-1 < a < 1$, alors la série converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

- *Sinon, la série diverge.*

DÉMONSTRATION. Si $a = 1$, on a $S_k = k + 1 \to_{k\to+\infty} +\infty$.
Si $a \neq 1$, $S_k = \frac{1-a^{k+1}}{1-a}$.

- Si $-1 < a < 1$, $a^{k+1} \to_{k\to+\infty} 0$ donc $S_k \to_{k\to+\infty} \frac{1}{1-a}$.
- Si $a \in]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$, la suite a^{k+1} diverge, donc la suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diverge.

■

Le théorème suivant nous donne un lien entre la convergence d'une série $\sum_{n\geq p} u_n$ et celui de la suite $(u_n)_{n\geq p}$. Attention, c'est une condition nécessaire, mais pas suffisante !

THÉORÈME 2.5. *Si une série $\sum_{n\geq p} u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\geq p}$ converge vers 0.*

DÉMONSTRATION. Par définition,la convergence de la série est la convergence de la suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers la somme $S = \sum_{n=p}^{+\infty} u_n$. On a, pour tout $n \geq p + 1$,

$$u_n = S_n - S_{n-1} \to_{n\to+\infty} S - S = 0.$$

■

Par contraposée, le théroème nous dit que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série diverge.

Définition 2.6. Lorsque la suite $(u_n)_{n\geq p}$ ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum_{n\geq p} u_n$ diverge grossièrement .

3. Séries à termes positifs

Dans ce paragraphe, on étudiera les séries numériques $\sum_{n\geq p} u_n$ à termes positifs, c'est à dire telles que, pour tout $n \geq p$, $u_n \geq 0$.

Remarque 3.1. Dans ce cas, la suite des sommes partielles $(S_k)_{k\geq p}$ est croissante. En effet, pour tout $k \geq p$,

$$S_{k+1} - S_k = \sum_{n=p}^{k+1} u_n - \sum_{n=p}^{k} u_n = u_{k+1} \geq 0.$$

En utilisant le résultat sur la convergence des suites croissantes, on obtient la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2. *Une série $\sum_{n\geq p} u_n$ à termes positifs converge si et seulement il existe $M > 0$ telle que, pour tout $k \geq p$,*

$$S_k = \sum_{n=p}^{k} u_k \leq M.$$

Dans le cas contraire, $\sum_{n=p}^{k} u_n \to_{k\to+\infty} +\infty$.

PROPOSITION 3.3 (Comparaison par inégalités). *Soient deux séries à termes positifs* $\sum_{n\geq p} u_n$ *et* $\sum_{n\geq p} v_n$ *telles que* $u_n = O(v_n)$.
Autrement dit, elles vérifient : il existe une constante $c > 0$ *tel pour tout* $n \geq p$,

$$0 \leq u_n \leq cv_n.$$

Alors

(i) *Si la série* $\sum_{n\geq p} v_n$ *converge, alors la série* $\sum_{n\geq p} u_n$ *converge.*
(ii) *Si la série* $\sum_{n\geq p} u_n$ *diverge, alors la série* $\sum_{n\geq p} v_n$ *diverge.*

DÉMONSTRATION. On a, pour tout $n \geq p$,

$$0 \leq \sum_{n=p}^{k} u_n \leq c \sum_{n=p}^{k} v_n.$$

On utilise la proposition 3.2. :

(i) Si la série $\sum_{n\geq p} v_n$ converge, alors il existe $M > 0$ tel que, pour tout $k \geq p$,

$$\sum_{n=p}^{k} u_n \leq c \sum_{n=p}^{k} v_n \leq cM.$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geq p} u_n$ converge.
(ii) C'est la contraposée de (i).

■

PROPOSITION 3.4. *Soit* $\sum_{n\geq p} u_n$ *une série à termes strictement positifs.*

(i) *On suppose qu'il existe* $a \in]0,1[$ *tel que pour tout* $n \geq p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq a$. *Alors la série converge.*
(ii) *On suppose que pour tout* $n \geq p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. *Alors la série diverge (grossièrement).*

DÉMONSTRATION. (i) Dans ce cas, on a pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \leq au_n$. On en déduit que

$$\forall n \geq p,\ 0 \leq u_n \leq (a^{-p}u_p)a^n.$$

La série $\sum_{n\leq p} a^n$ est une série géométrique convergente car sa raison $a \in]0,1[$. D'après la proposition précédente, la série $\sum_{n\geq p} u_n$ converge.
(ii) Dans ce cas, on a pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \geq u_n$. On en déduit que

$$\forall n \geq p,\ u_n \geq u_p > 0.$$

En particulier, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. Autrement dit, la série diverge grossièrement.

■

THÉORÈME 3.5 (Règle de d'Alembert). *Soit* $\sum_{n\geq p} u_n$ *une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe* $\lambda \in [0,1[$ *tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to_{n\to+\infty} \lambda.$$

(i) *Si* $\lambda \in [0,1[$, *alors la série converge.*
(ii) *Si* $\lambda \in]1,+\infty[$, *alors la série diverge (grossièrement).*

Attention : ce théorème ne permet pas de conclure dans le cas où $\lambda = 1$.

DÉMONSTRATION. (i) Dans ce cas, $\frac{1-\lambda}{2} > 0$. Il existe $N \geq p$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \lambda| < \frac{1-\lambda}{2}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = |\frac{u_{n+1}}{u_n} - \lambda + \lambda| \leq |\frac{u_{n+1}}{u_n} - \lambda| + |\lambda| < \frac{1-\lambda}{2} + \lambda = \frac{1+\lambda}{2}.$$

Le nombre $a = \frac{1+\lambda}{2} < 1$. D'après la proposition précédente, la série $\sum_{n\geq N} u_n$ converge.

(ii) Dans ce cas, on a $\frac{\lambda-1}{2} > 0$. Il existe $N \geq p$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \lambda| < \frac{\lambda-1}{2}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = |\lambda + \frac{u_{n+1}}{u_n} - \lambda| \geq |\lambda| - |\frac{u_{n+1}}{u_n} - \lambda| > \lambda - \frac{\lambda-1}{2} = \frac{\lambda+1}{2} > 1.$$

D'après la proposition précédente, la série $\sum_{n\geq N} u_n$ diverge grossièrement.

■

PROPOSITION 3.6. *Soit $\sum_{n\geq p} u_n$ une série à termes strictement positifs.*

(i) *On suppose qu'il existe $a \in]0,1[$ tel que pour tout $n \geq p$, $u_n^{1/n} \leq a$. Alors la série converge.*
(ii) *On suppose que pour tout $n \geq p$, $u_n^{1/n} \geq 1$. Alors la série diverge (grossièrement).*

DÉMONSTRATION. (i) Dans ce cas, on a pour tout $n \geq p$, $u_n \leq a^n$. La série $\sum_{n\geq p} a^n$ est une série géométrique convergente car sa raison $a \in]0,1[$. D'après la proposition précédente, la série $\sum_{n\geq p} u_n$ converge.

(ii) Dans ce cas, on a pour tout $n \geq p$, $u_n \geq 1$. En particulier, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. Autrement dit, la série diverge grossièrement.

■

THÉORÈME 3.7 (Règle de de Cauchy). *Soit $\sum_{n\geq p} u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $\lambda \in [0,1[$ tel que*

$$(u_n)^{1/n} \to_{n\in+\infty} \lambda.$$

(i) *Si $\lambda \in [0,1[$, alors la série converge.*
(ii) *Si $\lambda \in]1,+\infty[$, alors la série diverge (grossièrement).*

DÉMONSTRATION. C'est une répétition de celle de la règle de d'Alembert en remplaçant la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par la suite $u_n^{1/n}$ et en utilisant la proposition 3.6. ■

PROPOSITION 3.8.
Soit $\sum_{n\geq p} u_n$ une série à termes strictement positifs. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \lambda$, alors $u_n^{1/n} \to \lambda$.

Définition 3.9 (Séries de Riemann). On appelle série de Riemann toute série de la forme

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante réelle.}$$

Remarquer que dans le cas où $\alpha = 1$, on retrouve la série harmonique.

PROPOSITION 3.10. *Une série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Définition 3.11 (Séries de Bertrand). On appelle série de Bertrand toute série de la forme

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes réelles.}$$

Remarquer que dans le cas où $\beta = 0$, on retrouve une série de Riemann.

PROPOSITION 3.12. *Une série de Bertrand* $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$ *ou* ($\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$).

THÉORÈME 3.13.
Soient deux séries à termes positifs $\sum_{n\geq p} u_n$ *et* $\sum_{n\geq p} v_n$ *telles que*

$$u_n \simeq v_n.$$

Alors $\sum_{n\geq p} u_n$ *converge si et seulement si* $\sum_{n\geq p} v_n$ *converge.*

Attention : on n'a pas nécessairement $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n = \sum_{n=p}^{+\infty} v_n$.

DÉMONSTRATION. Comme les deux suites sont équivalentes, on a à la fois $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$. Il suffit d'appliquer Proposition 3.3. ■

PROPOSITION 3.14 (Règle de Riemann). *Soit* $\sum_n u_n$ *une série à termes positifs. Supposons qu'il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $n^\alpha u_n \to l$. *Alors*

- *Si* $\alpha > 1$ *et* $l \geq 0$, *la série* $\sum_n u_n$ *converge.*
- *Si* $\alpha < 1$ *et* $l > 0$, *la série* $\sum_n u_n$ *diverge.*

DÉMONSTRATION. Supposons $l > 0$. On a $\frac{n^\alpha u_n}{l} \to 1$. Autrement dit, $u_n \simeq \frac{l}{n^\alpha}$. D'après le théroème précédent, la série $\sum_n u_n$ est de même nature que la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Supposons $l = 0$ et $\alpha > 1$. Alors $u_n = o(\frac{1}{n^\alpha})$. Comme la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge. ■

4. Convergence absolue

Définition 4.1 (Convergence absolue). On dit qu'une série $\sum_n u_n$ est absolument convergente si la série $\sum_n |u_n|$ est convergente.

THÉORÈME 4.2. *Si une série numérique converge absolument, alors elle converge.*

DÉMONSTRATION. Considérons les suites des sommes partielles $S_k = \sum_{n\geq 1}^k u_n,\ T_k = \sum_{n\geq 1}^k |u_n|$. Supposons que la série $\sum_n |u_n|$ converge, c'est à dire que la suite $(T_k)_{k\geq p}$ converge. Alors la suite $(T_k)_k$ est de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $q > p \geq N$,

$$|S_q - S_p| = |\sum_{n=p+1}^{q} u_n| \leq \sum_{n=p+1}^{q} |u_n| = T_q - T_p < \varepsilon.$$

On en conclut que la suite $(S_k)_k$ est de Cauchy, donc elle converge. ■

5. Séries alternées

Définition 5.1. On appelle série alternée toute suite de la forme $\sum_{n\geq p}(-1)^n a_n$ ou $\sum_{n\geq p}(-1)^{n+1}a_n$ avec $a_n \geq 0$ pour tout $n \geq p$.

PROPOSITION 5.2 (Règle de Leibniz). *Soit $\sum_{n\geq p}(-1)^n a_n$ une série alternée vérifiant les propriétés suivantes :*

- *La suite $(a_n)_{n\geq p}$ est décroissante.*
- *$a_n \to_{n\to+\infty} 0$.*

Alors la série $\sum_{n\geq p}(-1)^n a_n$ converge. De plus, pour tout $k \geq p$, on a

$$\left|\sum_{n=p}^{+\infty}(-1)^n a_n - \sum_{n=p}^{k}(-1)^n a_n\right| \leq a_{k+1}.$$

DÉMONSTRATION. Considérons la suite des sommes partielles $S_k = \sum_{n=1}^{k}(-1)^n a_n$. Sachant que la suite $(a_n)_{n\geq n}$ est décroissante, on a pour tout $k \geq p$,

$$S_{2k+2} - S_{2k} = (-1)^{2k+1}a_{2k+1} + (-1)^{2k+2}a_{2k+2} = a^{2k+2} - a^{2k+1} \leq 0;$$

$$S_{2k+3} - S_{2k+1} = (-1)^{2k+2}a_{2k+2} + (-1)^{2k+3}a_{2k+3} = a^{2k+2} - a^{2k+3} \geq 0;$$

La suite $(S_{2k})_{k\geq p}$ est décroissante et la suite $(S_{2k+1})_{k\in p}$ est croissante. De plus, $S_{2k+1} - S_{2k} = -a_{2k+1} \to_{k\to+\infty} 0$. Autrement dit, ces deux suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers une limite commune. On en déduit que la suite $(S_k)_{k\geq p}$ converge, c'est à dire que la série $\sum_{n\geq p}(-1)^n a_n$ converge. Procédons maintenant à l'estimation du reste. Notons $S = \sum_{n=p}^{+\infty}(-1)^n a_n$. Pour tout $k \geq \frac{p}{2}$, on a $S_{2k+1} \leq S \leq S_{2k}$.

$$|S - S_{2k}| = S_{2k} - S \leq S_{2k} - S_{2k+1} = a_{2k+1}.$$

$$|S - S_{2k+1}| = S - S_{2k+1} \leq S_{2k+2} - S_{2k+1} = a_{2k+2}.$$

On a bien, pour tout $k \geq p$, $|S - S_k| \leq a_{k+1}$. ■

6. Sommation d'Abel

La sommation d'Abel consiste à transformer une somme $\sum_{n=p} a_n b_n$ avec la méthode suivante : Pour $n \geq p+1$, on écrit $a_n = A_n - A_{n-1}$ où $A_n = \sum_{j=p}^{n} a_j$.

$$\sum_{n=p}^{k} a_n b_n = a_p b_p + \sum_{n=p+1}^{k}(A_n - A_{n-1})b_n = a_p b_p + \sum_{n=p+1}^{k} A_n b_n - \sum_{n=p+1}^{k} A_{n-1}b_n$$

$$= a_p b_p + A_k b_k - A_p b_{p+1} + \sum_{n=p+1}^{k-1} A_n(b_n - b_{n+1}).$$

THÉORÈME 6.1. *Soit une série $\sum_{n\geq p} a_n b_n$ vérifiant :*

(i) *La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $A_n = \sum_{j=p}^{n} a_j$ est bornée.*
(ii) *La série $\sum_{n\geq p}|b_n - b_{n+1}|$ est convergente.*
(iii) *La suite $(b_n)_n$ tend vers 0.*

Alors la série $\sum_{n\geq p} a_n b_n$ est convergente.

DÉMONSTRATION. Montrons que la suite des sommes partielles $S_k = \sum_{n=p}^{k} a_n b_n$ converge. Grâce à la transformation d'Abel, on a, pour tout $k \geq p$,

$$S_k = a_p b_p + A_k b_k - A_p b_{p+1} + \sum_{n=p+1}^{k-1} A_n(b_n - b_{n+1}).$$

D'après l'hypothèse (i), $A_k b_k = O(b_k)$. D'après (iii), la suite $(A_k b_k)_{k\geq p}$ converge vers 0. D'après (i), il existe $R > 0$ tels que pour tout $n \geq p$, $|A_n| \leq R$. D'après (ii), il existe $T > 0$ tel que pour tout $k \geq p$

$$\sum_{n=p}^{k} |b_n - b_{n+1}| \leq T.$$

Donc, pour tout $k \geq p + 2$,

$$\sum_{n=p+1}^{k-1} |A_n(b_n - b_{n+1})| \leq R \sum_{n=p+1}^{k-1} |b_n - b_{n+1}| \leq RT$$

On en déduit que la série $\sum_{n=p+1}^{k-1} |A_n(b_n - b_{n+1})|$ converge. Finalement, la suite $(S_k)_{k\geq p}$ converge comme somme de suites convergentes.

■

THÉORÈME 6.2 (Règle d'Abel). *Soit une série $\sum_{n\geq p} a_n b_n$ vérifiant :*

(i) *La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $A_n = \sum_{j=p}^{n} a_j$ est bornée.*
(ii)' *La suite $(b_n)_{n\geq p}$ est décroissante.*
(iii) *La suite $(b_n)_{n\geq p}$ tend vers 0.*

Alors la série $\sum_{n\geq p} a_n b_n$ est convergente.

DÉMONSTRATION. Comme la suite $(b_n)_{n\geq p}$ est décroissante, pour tout $k \geq p$,

$$\sum_{n=p}^{k} |b_n - b_{n+1}| = \sum_{n=p}^{k} (b_n - b_{n+1}) = b_p - b_{k+1} \to_{k\to+\infty} b_p.$$

On conclut à l'aide du théroème précédent. ■

Le résultat suivant pourra être utile pour appliquer la règle d'Abel aux séries de la forme $\sum_n \sin(\theta n) b_n$ ou $\sum_n \cos(\theta n) b_n$ où $(b_n)_n$ est une suite décroissante et convergeant vers 0.

LEMME 6.3. *Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2j\pi, j \in \mathbb{Z}\}$. On a les inégalités suivantes, pour tout $k \in \mathbb{N}$:*

$$|\sum_{n=0}^{k} e^{in\theta}| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}; |\sum_{n=0}^{k} \sin(n\theta)| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}; |\sum_{n=0}^{k} \cos(n\theta)| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}.$$

DÉMONSTRATION. Remarquons que $e^{i\theta} \neq 1$.

$$\sum_{n=0}^{k} e^{in\theta} = \frac{e^{i(k+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i(k+1)\theta/2}\left(e^{i(k+1)\theta/2} - e^{-i(k+1)\theta/2}\right)}{e^{i\theta/2}\left(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}\right)} = e^{ik\theta/2}\frac{\sin((k+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

$$\left|\sum_{n=0}^{k} e^{in\theta}\right| = \left|\frac{\sin((k+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}.$$

Les deux autres inégalités en découlent en prenant les parties réelles et imaginaires. ■

7. Produit de Cauchy

Définition 7.1. Soient $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries numériques. On appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série $\sum_{n\geq 0} c_n$ où $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$.

THÉORÈME 7.2. *On suppose que* $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ *et* $\sum_{n\geq 0} b_n$ *convergent. Alors la série produit converge. De plus,*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Si les deux séries convergent absolument, alors la série produit converge absolument.

DÉMONSTRATION. Soit $M > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=0}^{k} |a_j| \leq M$ et $\left|\sum_{n=0}^{k} b_n\right| \leq M/2$.

$$\text{Ecrivons}\quad \Delta_k = \sum_{n=0}^{k}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right) - \left(\sum_{j=0}^{k} a_j\right)\left(\sum_{n=0}^{k} b_n\right)$$

et montrons que $\Delta_k \to_{k\to+\infty} 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Remarquons que

$$\sum_{n=0}^{k}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right) = \sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{n=j}^{k} a_j b_{n-j}\right) = \sum_{j=0}^{k} a_j\left(\sum_{n=j}^{k} b_{n-j}\right) = \sum_{j=0}^{k} a_j\left(\sum_{n=0}^{k-j} b_k\right).$$

$$\text{Donc}\quad \Delta_k = \sum_{j=0}^{k} a_j\left(\sum_{n=0}^{k-j} b_n - \sum_{n=0}^{k} b_n\right) = \sum_{j=0}^{k} a_j\left(\sum_{n=k-j+1}^{k} b_n\right).$$

Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $q \geq p \geq N_1$, $\left|\sum_{n=p+1}^{q} b_n\right| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour $q \geq p \geq N_2$, $\sum_{j=p+1}^{q} |a_j| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $k \geq 2N$ et $j \leq N$, on a $k - j \geq N$, donc

$$\sum_{j=0}^{N} |a_j|\left|\sum_{n=k-j+1}^{k} b_n\right| < \frac{\varepsilon}{2M}\sum_{j=0}^{N} |a_j| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{De plus,}\quad \sum_{j=N+1}^{k} |a_j|\left(\left|\sum_{n=0}^{k-j} b_n\right| + \left|\sum_{n=0}^{k} b_n\right|\right) \leq M\sum_{j=N+1}^{k} |a_j| \leq M\frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, pour tout $k \geq N$, on obtient

$$|\Delta_k| \leq \sum_{j=0}^{N} |a_j|\left|\sum_{n=k-j+1}^{k} b_n\right| + \sum_{j=N+1}^{k} |a_j|\left(\left|\sum_{n=0}^{k-j} b_n\right| + \left|\sum_{n=0}^{k} b_n\right|\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Supposons maintenant que les deux séries $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ et $\sum_{n\geq 0} |b_n|$ convergent. En appliquant ce qui précède, le produit de Cauchy $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{n} |a_j||b_{n-j}|\right)$ converge. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}| \leq \sum_{j=0}^{n} |a_j||b_{n-j}|.$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right)$ converge absolument.

■