1. Séries trigonométriques

Définition 1.1. On appelle série trigonométrique toute série de fonctions de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. En tout point x ou la série converge, on notera

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

PROPOSITION 1.2.

- *Si la série converge en un point $x \in \mathbb{R}$, alors elle converge en tout point de la forme $x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. De plus, on $f(x) = f(x + 2k\pi)$.*
- *Si la série converge simplement sur $\mathbb{R}$, alors f est une fonction périodique, de période 2π.*

PROPOSITION 1.3.

(i) *Si les séries numériques $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont absolument covergentes, alors la série trigonométrique est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.*

(ii) *Si les séries numériques $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes et tendent vers 0, alors la série trigonométrique est simplement convergente sur $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.*

PROOF.

(i) Il suffit de remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|.$$

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} |\cos(nx)| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

et

$$\sum_{n=0}^{N} |\sin(nx)| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}.$$

Grâce au critère d'Abel pour les séries numériques, les deux séries

$$\sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx) \text{ et } \sum_{n\geq 1} a_n \sin(nx)$$

convergent donc leur sommes converge aussi.

■

2. Représentation complexe des séries trigonométriques

Les formules d'Euler donnent :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \;\; \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

La série trigonométrique s'écrit alors

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

avec, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$c_0 = \frac{a_0}{2}; \; c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}; \; c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

3. Calcul des coefficients

PROPOSITION 3.1. *Soit f une fonction périodique de période 2π et intégrable dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a*

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)dt.$$

PROPOSITION 3.2. *Soient $k, n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :*

$$\int_0^{2\pi} e^{ix(k-n)}dx = \begin{cases} 0 & \textit{si} \quad k \neq n \\ 1 & \textit{si} \quad k = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0 & \textit{si} \quad k \neq n \\ 1 & \textit{si} \quad k = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(nx)dx = \begin{cases} 0 & \textit{si} \quad k \neq n \\ 1 & \textit{si} \quad k = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\sin(nx)dx = 0.$$

PROPOSITION 3.3. *Supposons que la série*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$ et posons

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \; = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}.$$

Alors, on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

Et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

4. Séries de Fourier

Définition 4.1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$. On appelle série de Fourier associée à f la série trigonométrique

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}.$$

avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Ce sont les coefficients de Fourier réels.

Les coefficients de Fourier complexes sont donnés par pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

Les correspondances entre les coefficients de Fourier réels et complexes sont, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$c_0 = \frac{a_0}{2};\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2};\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$
$$a_0 = 2c_0;\ a_n = c_n + c_{-n};\ b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Remarque 4.2.

Si f est paire sur $[-\pi, \pi]$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx;\ b_n = 0.$$

Si f est impaire sur $[-\pi, \pi]$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = 0;\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

LEMME 4.3 (Lemme de Lebesgue). *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction* 2π*-périodique et continue par morceaux sur* $[-\pi, \pi]$. *On a*

$$\lim_{|\alpha|\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{\alpha t}dt = 0.$$

En particulier, pour les coefficients de Fourier :

$$\lim_{|k|\to+\infty} c_k = 0.$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

PROOF. La propriété est immédiate si $f = 1$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha k} dt = -\frac{2\pi}{i\alpha}.$$

On généralise la propriéte aux fonctions en escalier en utilisant la relation de Chasles.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue par morceaux, il existe deux fonctions en escalier , ϕ et ψ telles que $\phi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \phi \leq \frac{1}{4\pi\varepsilon}$. De plus, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $|alpha| \geq N$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t)e^{\alpha t} dt \leq \frac{\varepsilon}{2}; \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t)e^{-\alpha t} dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{\alpha t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - \phi(t))e^{\alpha t} dt + \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t)e^{\alpha t} dt < \varepsilon.$$

D'autre part,

$$-\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{\alpha t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} (-f(t) + \psi(t))e^{\alpha t} dt + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(t)e^{\alpha t} dt < \varepsilon.$$

On a donc, pour $k \geq N$,

$$|c_k| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{\alpha t} dt \right| < \varepsilon.$$

■

Notation : En tout point $a \in \mathbb{R}$, on note

$$f(a^+) = \lim_{x\to a^+} f(x);\ f(a^-) = \lim_{x\to a^-} f(x).$$

Si a est un point où f est continue, on $f(a^+) = f(a^-) = f(a)$.

THÉORÈME 4.4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$. On suppose que f admet en tout point une dérivée à gauche et une dérivée à droite. Alors, la série de Fourier de f est simplement convergente sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

De plus, la convergence est uniforme sur tout intervalle où f est continue.

Notations : On notera respectivement $f'(x^+)$ et $f'(x^-)$ les dérivées à droite et à gauche au point x.

PROOF. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathbb{R}$, posons

$$D_n(u) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iknu}.$$

L'application D_n est appelée "noyau de Dirichlet. On a

$$\begin{aligned}
D_n(v) &= -1 + \sum_{k=0}^{n} e^{iku} + \sum_{k=0}^{n} e^{-iku} = -1 + \frac{e^{i(n+1)u} - 1}{e^{iu} - 1} + \frac{e^{i(n+1)u} - 1}{e^{iu} - 1} \\
&= -1 + e^{inu/2} \frac{\sin((n+1)u/2)}{\sin(u/2)} + e^{-inu/2} \frac{\sin((n+1)u/2)}{\sin(u/2)} \\
&= -1 + 2 \frac{\cos(nu/2)\sin((n+1)u/2)}{\sin(u/2)} \\
&= -1 + \frac{\sin((n+1/2)u + \sin(u/2)}{\sin(u/2)} \\
&= \frac{\sin((n+1/2)u}{\sin(u/2)}
\end{aligned}$$

De plus, on a, pour tout $n/in\mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) du = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inu} du = 1.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, Posons

$$\begin{aligned}
S_N(x) &= \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} e^{ikx} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-N}^{N} e^{ik(x-t)} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_N du \text{ (en posant } u = x - t) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) D_N(u) du \text{ (en posant } u = t - x).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
S_N(x) =& \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} \sum_{k=-N}^{N} e^{iku} du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} du.
\end{aligned}$$

$$S_N(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(x-u) + f(x+u)}{2} - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right) D_N(u).$$

Considérons la fonction g définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$g(u) = \frac{f(x-u) + f(x+u) - f(x^+) - f(x^-)}{2\sin u/2}, \text{si } u \neq 0$$
$$g(0) = f'(x^+) - f'(x^-).$$

La fonction g est continue en 0 car

$$g(u) = \frac{f(x-u) + f(x+u) - f(x^+) - f(x^-)}{u} \frac{u}{2\sin u/2} \to g(0),$$

et elle est continue par morceaux sur $[-\pi, 0[\cup]0, \pi[$. Elle est donc continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$. D'après le lemme de Lebesgue, on a :

$$S_N(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin((n + 1/2)udu \to_{N \to +\infty} 0.$$

■

THÉORÈME 4.5 (Egalité de parseval). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$. La série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$ est convergente et*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2.$$

Remarque 4.6. En utilisant les correspondances entres les coefficients réels et complexes, ce résultat s'écrit aussi :

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2.$$

5. L'approche hilbertienne

On considère l'espace vectoriel E des fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux sur $[0, 2\pi]$. On définit une application $< ., . >: E \times E \to \mathbb{C}$ par :

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(\bar{t}) dt.$$

Cette application est une forme hermitienne, c'est à dire qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

- $< f + g, h >=< f, h > + < g, h >$;
- $< \lambda f, g >= \lambda < f, g >$;
- $< f, g >= \overline{< g, f >}$.

De plus, cette forme est positive, c'està dire que :$< f, f >\geq 0$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $e_k : \mathbb{R} :\to \mathbb{C}$ la fonction définie par $e_k(x) = e^{ikx}$.

PROPOSITION 5.1. *La famille $\{e_k, k \in \mathbb{Z}\}$ est une famille orthononormale de l'espace F muni de la forme $< ., . >$.*

Remarque 5.2. Soit $f \in F$.

- On a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $c_k =< f, e_k >$.
- $\|f\|^2 =< f, f >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$.

Définition 5.3. On appelle polynôme trigonométrique de degré N, toute fonction de la forme

$$P_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx},$$

où c_k sont des nombres complexes avec $c_N \neq 0$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note E_N le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{e_n, -N \leq n \leq N\}$, autrement dit, celui des polynômes de degré $\leq N$.

PROPOSITION 5.4. *Soit $f \in F$ et $N \in \mathbb{N}$. On considère le polynôme trigonométrique associé à f :*

$$P_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-N}^{N} < f, e_k > e_k.$$

(i) *Le polynôme P_N est la projection orthogonale de f sur E_N.*
(ii)

$$\|P_N\|^2 = \sum_{k=-N}^{N} | < f, e_k > |^2.$$

PROOF. (i) Soit $n \in \{-N, \cdots, N\}$. On a

$$< P_N(f), e_n >= \sum_{k=-N}^{N} < f, e_k >< e^k, e_n >=< f, e_n > .$$

Donc

$$< P_N(f) - f, e_n >=< P_N(f), e_n > - < f, e_n >= 0.$$

(ii)

$$\begin{aligned}
< P_N(f), P_N(f) > &=< \sum_{k=-N}^{N} < f, e_k > e_k, \sum_{n=-N}^{N} < f, e_n > e_n > \\
&= \sum_{k=-N}^{N} < f, e_k >< e_k, \left(\sum_{n=-N}^{N} < f, e_n > e_n\right) > \\
&= \sum_{k=-N}^{N} < f, e_k > \left(\sum n = -N^N < e_k, < f, e_n > e_n\right) \\
&= \sum_{k=-N}^{N} < f, e_k > \left(\sum n = -N^N \overline{< f, e_n >} < e_k, e_n >\right) \\
&= \sum_{k=-N}^{N} < f, e_k > \overline{< f, e_k >} = \sum_{k=-N}^{N} | < f, e_k > |.
\end{aligned}$$

∎

LEMME 5.5. *Soit*

PROPOSITION 5.6 (Inégalité de Bessel). *Soit* $f \in F$.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |< f, e_k >|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

PROOF. Soit $N \in \mathbb{N}$. D'après le thérorème de Pythagore,

$$\|f\|^2 = \|f - P_N(f)\|^2 + \|P_N(f)\|^2.$$

En particulier,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |< f, e_k >|^2 = \|P_N(f)\|^2 \leq \|f\|^2.$$

∎