CHAPITRE 2 - SUITES RÉELLES

1. Définitions et premières propriétés

Définition 1.1. Une suite numérique est une application

$$u : \begin{array}{ll} \mathbb{N} & \to \mathbb{R} \\ n & \mapsto u_n \end{array}$$

En général, la suite u est notée (u_n).

Remarque 1.2. Parfois, u_n n'est défini qu'à partir d'un certain rang $p \in \mathbb{N}$. On notera alors $(u_n)_{n \geq p}$.

Exemples :

(1) Les suites arithmétiques.
Elles sont de la forme $u_n = an + b$ où a et b sont des rnombres réels fixés.
Le nombre b est le premier terme ($u_0 = b$) et le nombre a est appelé raison de la suite.
Deux termes consécutifs sont liés par la relation : $u_{n+1} = a + u_n$.

(2) Les suites géométriques.
Elles sont de la forme $u_n = ba^n$ où a et b sont des nombres réels non nuls fixés.
Le nombre b est le premier terme ($u_0 = b$) et le nombre a est appelé raison de la suite.
Deux termes consécutifs sont liés par la relation : $u_{n+1} = au_n$.

(3) Les suites définies par récurrence.
Elles sont définies par la donnée d'un ou plusieurs premiers termes et d'une relation de récurrence reliant u_n aux termes précédents.
Exemples :
(a) $u_0 = 1$, $u_n = \sin(u_{n-1})$, $n \geq 1$.

(b) $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $n \geq 2$. Cette suite s'appelle la suite de Fibonacci

Définition 1.3 (Sens de variation). Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(1) On dit qu'elle est **constante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$.

(2) On dit qu'elle est **stationnaire** s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+p} = u_p.$$

(3) On dit qu'elle est **croissante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} \geq u_n.$$

(4) On dit qu'elle est **strictement croissante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} > u_n.$$

(5) On dit qu'elle est **décroissante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} \leq u_n.$$

(6) On dit qu'elle est **strictement décroissante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} < u_n.$$

(7) On dit qu'elle est **monotone** (resp. strictement) si elle décroissante ou croissante (resp. strictement).

Définition 1.4 (Majorée, minorée, bornée).
Une suite numérique (u_n) est dite

(1) **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. On dit alors qu'elle est majorée par M et que M est un majorant de la suite.
(2) **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n \geq m.$$
On dit alors qu'elle est minorée par m et que m est un minorant de la suite.
(3) **bornée** s'il existe $R \geq 0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n| \leq R.$$
On dit alors qu'elle est bornée par R et que R est une borne de la suite.

Remarque 1.5. Une suite numérique est bornée par R si et seulement si elle est minorée par $-R$ et majorée par R.

Exemples :

(1) La suite $u_n = \sin n$ est minorée par -1, majorée par 1 et bornée par 1. Elle est bornée par 1.
(2) La suite $u_n = 2 + (-1)^n$ est minorée par 1 et majorée par 3. Elle est bornée par 3.

2. Convergence

Définition 2.1.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que la suite est **convergente** s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Si un tel nombre ℓ existe, alors il est unique. Ce nombre est appelé **limite** de la suite (u_n). On note :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell, \text{ ou encore } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

PREUVE DE L'UNICITÉ.
Supposons que la suite (u_n) admet deux limites distinctes ℓ et ℓ'. Posons $\varepsilon = \frac{|\ell-\ell'|}{4} > 0$,
$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - \ell'| < \varepsilon.$$
Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Alors pour tout $n \geq N$, on a à la fois
$$|u_n - \ell| < \varepsilon \text{ et } |u_n - \ell'| < \varepsilon.$$
On en déduit
$$4\varepsilon = |\ell - \ell'| = |\ell - u_n + u_n - \ell'| \leq |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| < 2\varepsilon.$$
On obtient une contradiction.

□

Exemple.

$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Montrons que cette suite vérifie la définition 2.1 avec $\ell = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'axiome d'Archimède, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p > \frac{1}{\varepsilon}$. Alors

$$\forall n \geq p, \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{p} < \varepsilon.$$

Remarque 2.2.

Pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et celle de la suite $(u_n)_{n\geq p}$ sont équivalentes. Autrement dit, la convergence ne dépend pas des premiers termes.

Définition 2.3.

On dit qu'une suite est divergente si elle n'est pas convergente.

Exemple La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.

Montrons que cette suite ne vérifie pas la définition 2.1.

Supposons pas l'absurde qu'elle vérifie la définition 2.1 avec un certain $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, en particulier, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$|(-1)^n - \ell| < \frac{1}{2}.$$

Alors, par l'inégalité triangulaire, on a, pour tout $n \geq N$,

$$|(-1)^n - (-1)^{n+1}| = |(-1)^n - \ell - ((-1)^{n+1} - \ell)| \leq |(-1)^n - \ell| + |(-1)^{n+1} - \ell| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Mais $|(-1)^n - (-1)^{n+1}| = 2$. On aurait $2 < 1$. D'où la contradiction

PROPOSITION 2.4. *Toute suite convergente est bornée.*

PREUVE. Soit (u_n) une suite qui converge vers une certaine limite ℓ. En utilisant la définition dans le cas particulier où $\varepsilon = 1$, on a l'existence d'un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - \ell| < 1$.

Posons $M = \max\{|u_1|, |u_2| \dots |u_{N-1}|\}$.

On a alors, pour tout $n \in \{0, \cdots, N-1\}$, $|u_n| \leq M \leq \max(1 + |\ell|, M)$.

Par l'inégalité triangulaire, pour tout $n \geq N$,

$$|u_n| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq 1 + |l| \leq \max(1 + |\ell|, M).$$

Finalement, la suite est bornée par $\max(1 + |\ell|, M)$.

□

Remarque 2.5. La réciproque est fausse. Par exemple, la suite $(-1)^n$ est bornée mais divergente.

3. Opérations sur les limites

PROPOSITION 3.1.
Soit (u_n) une suite.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0.$
(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0.$
(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \implies \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|.$

PREUVE.

(1) Dans les 3 cas, la définition est

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

(2) Prendre $\ell = 0$ dans (1).
(3) Supposons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, $|u_n - l| < \varepsilon$. Alors pour $n \geq N$, en appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient $||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - l| < \varepsilon$.

$\square$

PROPOSITION 3.2. *Soient (u_n) et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites qui convergent respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors*

(1) La suite $(\alpha u_n + \beta v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha\ell_1 + \beta\ell_2$.
(2) La suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_1\ell_2$.

PREUVE.

(1) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$, on a :

$$|u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)}.$$

Il existe également $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_2$, on a :

$$|v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2(|\beta| + 1)}.$$

Alors pour tout $n \geq N = \max(N_1, N_2)$, on a

$$\begin{aligned} |\alpha u_n + \beta v_n - (\alpha\ell_1 + \beta\ell_2)| &\leq |\alpha||u_n - \ell_1| + |\beta||v_n - \ell_2| \\ &\leq \frac{|\alpha|\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)} + \frac{|\beta|\varepsilon}{2(|\beta| + 1)} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

(2) La suite (v_n) étant convergente, elle est bornée. Soit $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq M$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$, on a :

$$|u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Il existe également $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_2$, on a :

$$|v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2(|\ell_1| + 1)}.$$

Alors pour tout $n \geq N = \max(N_1, N_2)$, on a

$$\begin{aligned}
|u_n v_n - \ell_1 \ell_2| &= |u_n v_n - \ell_1 v_n + \ell_1 v_n - \ell_1 \ell_2)| \leq |u_n v_n - \ell_1 v_n| + |v_n \ell_1 - \ell_2 \ell_1| \\
&\leq M|u_n - \ell_1| + |\ell_1||v_n - \ell_2| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|\ell_1|\varepsilon}{2(|\ell_1|+1)} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

PROPOSITION 3.3.
Soit une suite (u_n) qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

(1) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq a$, alors $\ell \geq a$.
(2) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq a$, alors $\ell \leq a$.

Remarque 3.4. Attention, $u_n > a$ n'implique pas $\ell > a$.
Par exemple $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$ mais la limite de la suite $(\frac{1}{n})$ est égale à 0.

PREUVE.

(1) Procédons pas contraposée en supposant que $\ell < a$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \frac{a-\ell}{2}$. Pour tout $n \geq N$, on a alors

$$u_n = u_n - \ell + \ell \leq |u_n - \ell| + \ell < \frac{a-\ell}{2} + \ell = \frac{a+\ell}{2} < a.$$

(2) La suite $(-u_n)$ converge vers $-\ell$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-u_n \geq -a$. D'après (1), on a alors $-\ell \geq -a$, ce qui est équivalent à $\ell \leq a$.

□

PROPOSITION 3.5.
Soient deux suites (u_n) et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2. Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$,

$$u_n \leq v_n.$$

Alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

PREUVE.
Pour tout $n \geq p$, on a $v_n - u_n \geq 0$. Or $(v_n - u_n)$ converge vers $\ell_2 - \ell_1$. Proposition 3.3 nous donne $\ell_2 - \ell_1 \geq 0$. □

PROPOSITION 3.6 (Théorème des gendarmes).
Soient trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n \leq u_n \leq v_n.$$

Si les deux suites (v_n) et (w_n) convergent vers une limite commune ℓ, alors la suite (u_n) converge également vers ℓ.

PREUVE.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe deux entiers N_1 et N_2 tels que

$$n \geq N_1 \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon,$$

$$n \geq N_2 \Rightarrow |w_n - \ell| < \varepsilon.$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$, on a

$$u_n - \ell \leq v_n - \ell \leq |v_n - \ell| < \varepsilon,$$

$$-(u_n - \ell) \leq -(w_n - \ell) \leq |w_n - l| < \varepsilon.$$

On en déduit que

$$|u_n - l| < \varepsilon.$$

$\square$

PROPOSITION 3.7.
Soient deux suites (u_n) et (v_n). Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_n \leq v_n.$$

Alors

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

PREUVE.
Il suffit d'appliquer le théorème des gendarmes avec $w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

PROPOSITION 3.8.
Soit (u_n) qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}^*$.

(1) Si $\ell > 0$, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq p$, $u_n > \frac{\ell}{2}$.
(2) Si $\ell < 0$, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq p$, $u_n < \frac{\ell}{2}$.
(3) $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ell}$.

PREUVE.

(1) Grâce à la convergence de la suite, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq p$, on a :

$$|u_n - \ell| < \frac{\ell}{2}.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, pour tout $n \geq p$, on obtient :

$$u_n = \ell + u_n - \ell > \ell - |u_n - \ell| > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}.$$

(2) On pose $v_n = -u_n$. La suite (v_n) converge vers $-\ell > 0$. D'après le premier cas, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq p$, $v_n > -\frac{\ell}{2}$, d'où $u_n < \frac{\ell}{2}$.

(3) D'après ce qui précède, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$, $|u_n| > \frac{|\ell|}{2}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq q$, on a :

$$|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon\,\ell^2}{2}.$$

Posons $N = \max(p, q)$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $|\ell u_n| > \frac{\ell^2}{2}$ et

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| &= \frac{|\ell - u_n|}{|\ell u_n|} \\ &\leq \frac{2}{\ell^2}|\ell - u_n| \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

□

4. Divergence vers l'infini

Définition 4.1.

(1) On dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si :

$$\forall R > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow u_n > R.$$

On note :

$$u_n \to +\infty.$$

(2) On dit qu'une suite (u_n) tend vers $-\infty$ si :

$$\forall R > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow u_n < -R.$$

On note :

$$u_n \to -\infty.$$

Remarque 4.2.

$$u_n \to +\infty \Leftrightarrow -u_n \to -\infty.$$

Exemple. La suite $u_n = n$ tend vers $+\infty$. En effet, par l'axiome d'Archimède, pour tout $R > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > R$. On a alors

$$\forall n \geq p, \;\; n \geq p > R.$$

PROPOSITION 4.3.

(1) Si $u_n \to +\infty$, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$, $u_n > 0$. De plus, $\frac{1}{u_n} \to 0$.
(2) Si $u_n \to -\infty$, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$, $u_n < 0$. De plus, $\frac{1}{u_n} \to 0$.
(3) S'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$, $u_n > 0$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\frac{1}{u_n} \to +\infty$.
(4) S'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$, $u_n < 0$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\frac{1}{u_n} \to -\infty$.

PREUVE.

(1) Soit $\varepsilon > 0$. La définition de la divergence vers $+\infty$ donne un rang $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$, on a $u_n > \frac{1}{\varepsilon}$, d'où $u_n > 0$ et $\frac{1}{u_n} < \varepsilon$.

(2) On pose $v_n = -u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (v_n) diverge vers $+\infty$. D'après le cas précédent, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$, $v_n > 0$. De plus, $\frac{1}{v_n} \to 0$. On en déduit que pour tout $n \geq p$, $u_n = -v_n < 0$. De plus, $\frac{1}{u_n} = -\frac{1}{v_n} \to 0$.
(3) Soit $R > 0$. La définition de la convergence vers 0 donne l'existence d'un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n| < \frac{1}{R}$. Pour $n \geq \max(N, p)$, on a alors $|u_n| = u_n < \frac{1}{R}$ d'où $\frac{1}{u_n} > R$.
(4) On pose $v_n = -u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geq p$, $v_n > 0$ et la suite (v_n) converge vers 0. D'après le cas précédent, $\frac{1}{v_n} \to +\infty$. On en déduit que $\frac{1}{u_n} = -\frac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

□

PROPOSITION 4.4. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

(1) Si (u_n) est minorée et (v_n) tend vers $+\infty$, alors la suite $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$.
(2) Si (u_n) est majorée et (v_n) tend vers $-\infty$, alors la suite $(u_n + v_n)$ tend vers $-\infty$.
(3) Si (u_n) est minorée par $m > 0$ et (v_n) tend vers $+\infty$, alors la suite $(u_n v_n)$ tend vers $+\infty$.
(4) Si (u_n) est majorée par $M < 0$ et (v_n) tend vers $+\infty$, alors la suite $(u_n v_n)$ tend vers $-\infty$.

PREUVE.

(1) Soit $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$. Soit $R > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $v_n > |R - m| \geq R - m$. Alors $u_n + v_n \geq m + v_n > R$.
(2) D'après (1), la suite $-(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$, ce qui est équivalent à dire que $(u_n + v_n)$ tend vers $-\infty$.
(3) Soit $R > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $v_n > \frac{R}{m}$. Alors $u_n v_n \geq m v_n > R$.
(4) D'après (3), comme $(-u_n)$ est minorée par $-M > 0$, la suite $(-u_n v_n)$ tend vers $+\infty$, ce qui est équivalent à dire que $(u_n v_n)$ tend vers $-\infty$.

□

PROPOSITION 4.5. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

(1) Si (u_n) est convergente et (v_n) tend vers $+\infty$, alors la suite $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$.
(2) Si (u_n) est convergente et (v_n) tend vers $-\infty$, alors la suite $(u_n + v_n)$ tend vers $-\infty$.
(3) Si (u_n) converge vers $\ell > 0$ et (v_n) tend vers $+\infty$, alors la suite $(u_n v_n)$ tend vers $+\infty$.
(4) Si (u_n) converge vers $\ell < 0$ et (v_n) tend vers $+\infty$, alors la suite $(u_n v_n)$ tend vers $-\infty$.

PREUVE.

(1) Comme (u_n) est convergente, d'après Proposition 2.4, elle est minorée. Il suffit d'appliquer Proposition 4.4 (1).
(2) Il suffit d'appliquer (1) à la suite $(-u_n)$.
(3) Comme (u_n) converge vers $\ell > 0$, d'après Proposition 3.8, la suite $(u_n)_{n \geq p}$ est minorée par $\frac{\ell}{2} > 0$. Il suffit alors d'appliquer Proposition 4.4 (3).
(4) Il suffit d'appliquer (3) à la suite $(-u_n)$.

□

PROPOSITION 4.6. *Soient deux suites (u_n) et (v_n). Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_n \leq v_n.$$

(1) Si $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$.
(2) Si $v_n \to -\infty$, alors $u_n \to -\infty$.

PREUVE.
(1) Soit $R > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq R$. Pour $n \geq N$, on a $v_n \geq u_n \geq R$.
(2) Il suffit de remarquer que

$$u_n \leq v_n \iff -v_n \leq -u_n$$

puis d'utiliser (1).

□

PROPOSITION 4.7. *Soit (u_n) la suite géométrique définie par*

$$u_n = a^n.$$

(1) Si $a > 1$, alors $a^n \to +\infty$.
(2) Si $-1 < a < 1$, alors $a^n \to 0$.
(3) Si $a < -1$, alors $a^{2n} \to +\infty$ et $a^{2n+1} \to -\infty$. La suite (u_n) est alors divergente.
(4) Si $a = 1$, alors la suite (u_n) est constante égale à 1 et converge donc vers 1.

PREUVE.
(1) Supposons que $a > 1$. Alors d'après l'inégalité de Bernoulli, on a

$$a^n = (1 + (a-1))^n \geq 1 + n(a-1).$$

Comme $a - 1 > 0$, $1 + n(a-1) \to +\infty$. On en déduit que $a^n \to +\infty$.
(2) Supposons que $-1 < a < 1$. Alors $\frac{1}{|a|} > 1$. D'après (1), $\frac{1}{(|a|)^n} = \left(\frac{1}{|a|}\right)^n \to +\infty$. On en déduit que $|a|^n \to 0$, puis que $a^n \to 0$.
(3) Supposons que $a < -1$. Alors $a^2 > 1$. D'après (1), $a^{2n} = (a^2)^n \to +\infty$. On en déduit que $a^{2n+1} = a\, a^{2n} \to -\infty$.

□

5. Convergence des suites monotones

THÉORÈME 5.1.
Soit (u_n) une suite numérique **croissante**.
(1) Si la suite et majorée, alors elle converge. De plus, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.
(2) Si la suite n'est pas majorée, alors $u_n \to +\infty$.

PREUVE.
(1) Supposons que la suite est majorée et posons $S = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $S - \varepsilon < u_p \leq S$.
Comme la suite est croissante, pour tout $n \geq p$, on a

$$S - \varepsilon < u_p \leq u_n \leq S.$$

On en déduit que pour tout $n \geq p$, on a

$$|u_n - S| = S - u_n < \varepsilon.$$

(2) Supposons que la suite n'est pas majorée. Alors, pour tout $R \in \mathbb{R}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p > R$. Comme la suite est croissante, pour tout $n \geq p$, on a

$$u_n \geq u_p > R.$$

□

THÉORÈME 5.2.
Soit (u_n) une suite numérique **décroissante***.*

(1) Si la suite et minorée, alors elle converge. De plus, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.
(2) Si la suite n'est pas minorée, alors elle tend vers $-\infty$.

PREUVE. Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la suite définie par

$$v_n = -u_n.$$

□

6. Notations de Landau

Soient deux suites (u_n) et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que (v_n) ne s'annule pas (à partir d'un certain rang). On écrit

- $u_n = O(v_n)$ si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ est bornée. On dit alors que u_n est un grand O de v_n.
- $u_n = o(v_n)$ si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ tend vers 0. On dit alors que u_n est un petit o de v_n.
- $u_n \sim v_n$ si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ tend vers 1. On dit alors que les deux suites sont équivalentes.

Exercice : Vérifier que $\sim$ est bien une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites réelles.

PROPOSITION 6.1. *On suppose que (v_n) ne s'annule pas.*
Si $u_n = O(v_n)$. Alors

(1) $v_n \to 0 \Longrightarrow u_n \to 0$.
(2) $|u_n| \to +\infty \Longrightarrow |v_n| \to +\infty$.

PREUVE. Comme la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ est bornée, il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq M \Longleftrightarrow |u_n| \leq M|v_n|.$$

On conclut en utilisant les propositions 3.7 et 4.6. □

Remarque 6.2. Comme toute suite convergente est bornée,

$$u_n = o(v_n) \Longrightarrow u_n = O(v_n).$$

$$u_n \sim v_n \Longrightarrow u_n = O(v_n) \quad \text{et } v_n = O(u_n).$$

PROPOSITION 6.3.
Soient deux suites (u_n) et (v_n) ne s'annulant pas et équivalentes,
Alors (v_n) converge si et seulement si (u_n) converge. En cas de convergence, elles ont la même limite.

PREUVE. Supposons que (v_n) converge et notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} v_n$. Alors, comme $\frac{u_n}{v_n} \to 1$, on a

$$u_n = \frac{u_n}{v_n} v_n \to_{n\to+\infty} \ell.$$

En inversant les rôles de u_n et v_n, on obtient la réciproque. □

7. Suites adjacentes

Définition 7.1. On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre est décroissante et $v_n - u_n \to 0$.

THÉORÈME 7.2.
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles convergent toutes les deux. De plus,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

PREUVE.
On peut supposer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

Montrons alors que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$. Alors on a $v_q \geq u_p$.
En effet, par croissance de (u_n) et par décroissance de (v_n), pour tout $n \geq \max(p, q)$, on a

$$u_p \leq u_n \quad \text{et} \quad v_q \geq v_n \quad \text{d'où} \quad v_q - u_p \geq v_n - u_n.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient

$$v_q - u_p \geq 0.$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par n'importe quel terme de (v_n). Donc elle converge. Notons ℓ sa limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = u_n + (v_n - u_n) \to \ell$.

□

8. Suites extraites

Définition 8.1. Soit (u_n) une suite. On appelle suite extraite toute suite de la forme $(u_{\psi(n)})$ avec $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

Exemple 8.2.

(1) $u_n = (-1)^n$.
En choisissant $\psi_1(n) = 2n$, on obtient la suite-extraite (u_{2n}) qui est constante égale à 1. On remarque que (u_{2n}) converge vers 1.
En choisissant $\psi_1(n) = 2n+1$, on obtient la suite-extraite $(u_{2n+1}) = -1$ qui est constante égale à -1. On remarque que (u_{2n+1}) converge vers -1.

(2) $u_n = \sin(n\frac{\pi}{2})$.
En choisissant $\psi_1(n) = 2n$, on obtient la suite-extraite (u_{2n}) qui est constante égale à 0.
En choisissant $\psi_2(n) = 4n+1$, on obtient la suite-extraite (u_{4n+1}) qui est constante égale à 1.
En choisissant $\psi_3(n) = 4n-1$, on obtient la suite-extraite (u_{4n+2}) qui est constante égale à -1.

LEMME 8.3. *Soit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\psi(n) \geq n$. En particulier, $\psi(n) \to +\infty$*

PREUVE. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

(1) $n = 0$: Evident car $\psi(0) \in \mathbb{N}$.
(2) Supposons $\psi(n) \geq n$. Comme ψ est strictement croissante, on a $\psi(n+1) > \psi(n)$ donc $\psi(n+1) \geq \psi(n) + 1 \geq n + 1$.

□

PROPOSITION 8.4. *Soit (u_n) une suite convergente et soit ℓ sa limite. Alors toutes ses suites extraites convergent vers ℓ.*

PREUVE. Soit $(u_{\psi(n)})$ une suite extraite. Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de la suite (u_n), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

D'après le lemme précédent, pour $n \geq N$, on a $\psi(n) \geq n \geq N$. D'où

$$|u_{\psi(n)} - \ell| < \varepsilon.$$

□

Remarque 8.5.

Proposition 8.4 est souvent utilisée pour montrer qu'une suite ne converge pas.

Revenons à l'exemple 8.2. Comme la suite $(-1)^n$ admet deux suites extraites qui convergent vers 2 limites différentes, on peut en déduire qu'elle ne converge pas.

De même, comme la suite $\sin(n\frac{\pi}{2})$ admet au moins deux suites extraites qui convergent vers 2 limites différentes, on peut en déduire qu'elle ne converge pas.

Définition 8.6 (Valeur d'adhérence).

On appelle valeur d'adhérence d'une suite toute limite d'une de ses suites extraites.

Remarque 8.7.

(1) D'après Proposition 8.4, si une suite est convergente, alors son unique valeur d'adhérence est sa limite.
(2) D'après Exemple 8.2, la suite $u_n = (-1)^n$ admet 1 et -1 comme valeurs d'adhérence.
(3) D'après Exemple 8.2, la suite $u_n = \sin(n\frac{\pi}{2})$ admet $0, 1$ et -1 comme valeurs d'adhérence.

THÉORÈME 8.8 (Théorème de Bolzano Weierstrass). *Toute suite réelle bornée admet au moins une valeur d'adhérence.*

* PREUVE. Soit (u_n) une suite réelle bornée, c'est à dire qu'il existe $R > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leq R$, ou encore

$$-R \leq u_n \leq R.$$

Notre méthode consiste à construire par récurrence deux suites $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$ et $b_0 \geq b_1 \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a les propriétés suivantes :

(i) $b_n - a_n = \dfrac{R}{2^{n-1}}$,
(ii) L'ensemble $E_n = \{k \in \mathbb{N} \ : \ a_n \leq u_k \leq b_n\}$ est infini.

On initialise les deux suites en posant $a_0 = -R,\ b_0 = R$. On a alors $E_0 = \mathbb{N}$. Les propriétés (i) et (ii) sont bien vérifiées.

Supposons construits les nombres $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$ et $b_0 \geq b_1 \geq \cdots \geq b_n$ vérifiant les propriétés (i) et (ii).

En particulier, $a_n \leq b_n$ puisque $b_n - a_n$ est positif.

Posons $m_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ (le milieu de a_n et b_n) et remarquons que $a_n \leq m_n \leq b_n$. Considérons les deux ensembles

$$E_n^+ = \{k \in \mathbb{N} \ : \ a_n \leq u_k \leq m_n\},$$
$$E_n^- = \{k \in \mathbb{N} \ : \ m_n \leq u_k \leq b_n\}.$$

Comme $E_n = E_n^+ \cup E_n^-$ est infini, on a nécessairement au moins l'un de ces deux ensembles qui est infini. On choisit a_{n+1} et b_{n+1} de la manière suivante :

(1) Si E_n^+ est infini, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$.
Dans ce cas, $b_{n+1} - a_{n+1} = m_n - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{R}{2^n}$ et $E_{n+1} = E_n^+$ est infini. Remarquons également que $a_{n+1} = a_n$ et que $b_{n+1} = m_n \leq b_n$.

(2) Si E_n^+ est fini, alors E_n^- est infini. Dans ce cas, on pose $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
Dans ce cas, $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - m_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{R}{2^n}$ et $E_{n+1} = E_n^-$ est infini. Remarquons cette fois-ci que $a_{n+1} = m_n \geq a_n$ et que $b_{n+1} = b_n$.

Nous avons construit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les propriétés (i) et (ii) sont vérifiées.

De plus, par construction, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme

$$b_n - a_n = \frac{R}{2^{n-1}} \to 0,$$

nous constatons que ces deux suites sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune ℓ.

Nous allons maintenant construire, par récurrence, des nombres entiers

$$\psi(0) < \psi(1) < \cdots < \psi(n) < ...$$

tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $a_n \leq u_{\psi(n)} \leq b_n$.

Posons $\psi(0) = 0$. On a bien $a_0 = -R \leq u_0 \leq R = b_0$.

Supposons construit les nombres $\psi(0) < \psi(1) < \cdots < \psi(n)$ vérifiant (iii).

Comme E_{n+1} est infini, il existe un nombre $k \in E_{n+1}$ tel que $k > \psi(n)$. Il suffit de choisir $\psi(n+1) = k$ pour que la propriété (iii) soit vérifiée au rang $n+1$.

Comme les suites (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite ℓ, le théorème des gendarmes montre que la suite extraite $(u_{\psi(n)})$ converge vers ℓ.

□

9. Suites de Cauchy

Définition 9.1. Une suite (u_n) est dite **de Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } q \geq p \geq N \Rightarrow |u_q - u_p| < \varepsilon.$$

Remarque 9.2. La définition est équivalente à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que, pour tout } p \geq N \text{ et } k \in \mathbb{N}, |u_{p+k} - u_p| < \varepsilon.$$

PROPOSITION 9.3. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

PREUVE. Soit (u_n) une suite convergente vers une limite ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq N$, on a

$$|u_p - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $q \geq p \geq N$. On a alors à la fois

$$|u_p - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |u_q - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où, par l'inégalité triangulaire,

$$|u_q - u_p| = |u_q - \ell - (u_p - \ell)| \leq |u_q - \ell| + |u_p - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

PROPOSITION 9.4. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

PREUVE. Soit (u_n) une suite de Cauchy. En utilisant la définition dans le cas particulier où $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $q \geq N$, $|u_q - u_N| < 1$.

Posons $M = \max(|u_0|, \ldots, |u_N|)$.

On a alors, pour tout $0 \leq q \leq N - 1$,

$$|u_q| \leq M < 1 + M.$$

Et par l'inégalité triangulaire, pour tout $q \geq N$,

$$|u_q| \leq |u_q - u_N| + |u_N| \leq 1 + |u_N| \leq 1 + M.$$

Finalement, la suite (u_n) est bornée par $1 + M$. □

THÉORÈME 9.5. *On suppose qu'une suite est de Cauchy et qu'elle admet une valeur d'adhérence. Alors elle est convergente.*

PREUVE. Notons (u_n) la suite, ℓ la valeur d'adhérence et $u_{\psi(n)}$ la suite extraite convergeant vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $J \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq J$,

$$|u_{\psi(n)} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme la suite est de Cauchy, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $q \geq p \geq K$, on a

$$|u_q - u_p| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $N = \max(J, K)$. Pour tout $n \geq N$, on a $\psi(n) \geq n \geq N$ et donc à la fois

$$|u_{\psi(n)} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |u_{\psi(n)} - u_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|u_n - \ell| = |u_n - u_{\psi(n)} + u_{\psi(n)} - \ell| \leq |u_n - u_{\psi(n)}| + |u_{\psi(n)} - \ell| < \varepsilon.$$

□

THÉORÈME 9.6. *Toute suite réelle de Cauchy est convergente.*

PREUVE. Soit (u_n) une suite de Cauchy. Elle est donc bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une valeur d'adhérence et d'après le théorème 9.5, elle converge. □

10. Étude des suites $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ et $\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et posons $p = \lfloor |x| \rfloor + 1$. Remarquons que pour $n \geq p$, on a

$$\frac{|x|}{n} \leq \frac{|x|}{p} < 1 \Longrightarrow -1 < \frac{x}{n} < 1.$$

On définit les suites $(a_n)_{n\geq p}$ et $(b_n)_{n\geq p}$ par

$$a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$$

THÉORÈME 10.1.

(i) *La suite (a_n) est croissante*
(ii) *La suite (b_n) est décroissante*
(iii) *Pour tout $n \geq p$, on a $a_n \leq b_n$.*
(iv) *a_n et b_n convergent vers la même limite.*

On peut déduire que ce sont deux suites adjacentes.

PREUVE.

(i) Pour $n \geq p$, posons

$$c = 1+\frac{x}{n} \ \text{ et } \ h = -\frac{x}{n}+\frac{x}{n+1} = -\frac{x}{n(n+1)}.$$

On a

$$c+h = 1+\frac{x}{n+1} \geq 0$$

et

$$c+(n+1)h = 1+\frac{x}{n}-\frac{x}{n} = 1.$$

L'inégalité de Bernoulli donne :

$$(c+h)^{n+1} \geq c^{n+1}+(n+1)c^n h = c^n(c+(n+1)h) = c^n.$$

On en déduit ce qui suit :

$$\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = (c+h)^{n+1} \geq c^n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n. \tag{10.2}$$

(ii) Soit $n \geq p$. En remplaçant x par $-x$ dans (10.2), on obtient

$$\left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \Longleftrightarrow \left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{-(n+1)} \leq \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n},$$

autrement dit,

$$b_{n+1} \leq b_n.$$

(iii) Pour tout $n \geq p$, comme $p > |x|$, on a $n^2 > x^2$, donc $0 < 1 - \dfrac{x^2}{n^2} \leq 1$.
D'une part, on a donc
$$\frac{a_n}{b_n} = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)^n = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1.$$
D'autre part, en appliquant l'inégalité de Bernoulli de nouveau, on obtient
$$\frac{a_n}{b_n} = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - n\frac{x^2}{n^2} = 1 - \frac{x^2}{n}.$$
Comme $1 - \frac{x^2}{n}$ tend vers 1, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, autrement dit, les suites a_n et b_n sont équivalentes : $a_n \sim b_n$.

(iv) Pour tout $n \geq p$, d'après (ii) et (iii), on a
$$a_n \leq b_n \leq b_p.$$
La suite (a_n) étant croissante et majorée, elle converge. Comme $a_n \sim b_n$, d'après Proposition 6.3, la suite (b_n) converge vers la même limite que (a_n).

□

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note
$$\exp(x) = \lim \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}.$$
Remarquons que pour tout $n \geq \lfloor |x| \rfloor + 1$, on a

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \exp(x) \leq \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}. \tag{10.3}$$

Proposition 10.2.

(i) $\exp(0) = 1$.

(ii) *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

(iii) *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \neq 0$ *et* $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

Preuve.

(i) Par définition, $\exp(0)$ est la limite de la suite constante égale à 1.

(ii) Supposons d'abord que $xy \geq 0$. Alors, pour tout $n \geq [|x| + |y|] + 1$, on a
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right) = 1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2} \geq 1 + \frac{x+y}{n},$$
et
$$\left(1-\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{y}{n}\right) = 1 - \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2} \geq 1 - \frac{x+y}{n}.$$
Donc, d'une part, on obtient
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n$$
et en passant à la limite quand $n \to +\infty$,
$$\exp(x)\exp(y) \geq \exp(x+y).$$

Et d'autre part, on obtient

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}\left(1-\frac{y}{n}\right)^{-n} \leq \left(1-\frac{x+y}{n}\right)^{-n}$$

et en passant à la limite quand $n \to +\infty$,

$$\exp(x)\exp(y) \leq \exp(x+y).$$

Finalement, on a bien $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$.
Si $xy \leq 0$, alors la même conclusion s'obtient en inversant les inégalités dans le raisonnement précédent.

(iii) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après (i) et (ii), on a $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$. On en déduit que $\exp(x) \neq 0$ et que $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

□

Notons que la propriété de multiplicativité se généralise à n nombres :

PROPOSITION 10.3. *Pour tout $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nombres réels, on a*

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \exp(x_k).$$

PREUVE. Effectuons une démonstration par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1$, l'égalité est triviale.
Supposons que l'égalité est vérifiée pour n'importe quels n nombres réels. Soient $n+1$ nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$. D'après Proposition 10.2 (ii), on a

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\exp(x_{n+1}).$$

Et en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right) = \left(\prod_{k=1}^{n} \exp(x_k)\right)\exp(x_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n+1} \exp(x_k).$$

□

PROPOSITION 10.4.

(i) *Pour tout $x \geq -1$, $\exp(x) \geq 1+x$.*
(ii) *Pour tout $x < 1$, $\exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$.*
(iii) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.*

PREUVE.

(i) Pour $x \geq -1$, l'inégalité de Bernouilli donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n\frac{x}{n} = 1+x.$$

Par passage à la limite, on obtient

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1+x.$$

(ii) Pour $x < 1$, l'inégalité de Bernouilli donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 - n\frac{x}{n} = 1 - x.$$

On en déduit que

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{1-x}$$

et par passage à la limite, on obtient

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{1-x}.$$

(iii) Si $x > 0$, alors d'après (i), $\exp(x) \geq 1 + x > 0$.
Si $x < 0$, alors $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0$.

□

PROPOSITION 10.5. *Si $y > x$, alors $\exp(y) > \exp(x)$.*

PREUVE. Si $y > x$, alors

$$\begin{aligned} \exp(y) - \exp(x) &= e^{x+y-x} - \exp(x) \\ &= \exp(x)e^{y-x} - \exp(x) \\ &= \exp(x)(e^{y-x} - 1) \\ &\geq \exp(x)(y - x) > 0 \end{aligned}$$

par les propositions 10.2(ii) et 10.4(i) et (iii). □