$\boxed{\text{SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS}}$

1. Suites de fonctions

Définition 1.1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une suite de fonctions définie sur I est la donnée, pour chaque entier n supérieur ou égal à un certain seuil n_0, d'une fonction $f_n : I \to \mathbb{R}$. On notera la suite $(f_n)_{n \geq n_0}$ ou, plus simplement, $(f_n)_n$.

Tout au long de ce chapitre, $(f_n)_n$ désignera une suites de fonctions définie sur $I \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.2 (Convergence simple ou convergence point par point).
On dit que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ si pour tout $x \in I$, la suite $f_n(x)$ converge vers $f(x)$.

Définition 1.3 (Traduction formelle de la convergence simple).
La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ si

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Notez que dans cette définition, N dépend à la fois de ε et de x.

Remarque 1.4.
- Pour $x \in I$ fixé, la suite $(f_n(x))_n$ est une suite numérique.
- Si, pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge vers un nombre noté l_x, alors on peut définir une nouvelle fonction $f : I \to \mathbb{R}$ en posant $f(x) = l_x$. Par définition, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge alors simplement vers f.

Exemple 1.5. La suite de fonctions $(f_n)_n$ définie sur $I = [0, 1]$ par $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1[$, $f(1) = 1$.

Définition 1.6 (Définition de la convergence uniforme).
On dit que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Notez que, contrairement à la convergence simple, N dépend de ε mais PAS de x.

Remarque 1.7. La convergence uniforme implique la convergence simple.

Définition 1.8 (Autre définition de la convergence uniforme).
On dit que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ si

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Exemple 1.9. La suite de fonctions $(f_n)_n$ définie sur $I = [0, 1]$ par $f_n(x) = x^n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.
En effet, si tel était le cas, elle convergerait à fortiori simplement vers f sur $[0, 1]$ et par unicité de la limite, f serait la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1[$, $f(1) = 1$. On

aurait alors, $\sup_{x\in[0,1[} |x^n| \to 0$ quand $n \to +\infty$. Or, pour tout n, $\sup_{x\in[0,1[} |x^n| = 1$. D'où la contradiction.

THÉORÈME 1.10 (Critère de Cauchy simple). *La suite $(f_n)_n$ est simplement convergente sur I si et seulement si*

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \textit{ tel que } p, q \geq N \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon.$$

On a écrit simplement, pour chaque $x \in I$ le critère de Cauchy pour la suite numérique $(f_n(x))_n$. On sait que toute suite numérique de Cauchy converge.

THÉORÈME 1.11 (Critère de Cauchy uniforme). *La suite $(f_n)_n$ est uniformément convergente sur I si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \textit{ tel que } p, q \geq N \Rightarrow \sup_{x\in I} |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon.$$

La différence est encore une fois dans l'ordre des quantificateurs. Pour la convergence uniforme, N ne dépend que ε alors que pour la convergence simple, N peut dépendre de ε et de x.

DÉMONSTRATION. Supposons le critère de Cauchy uniforme vérifié, alors le critère de Cauchy simple est vérifié à fortiori et la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f définie par $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe N ne dépendant que de ε tel que, pour tout $p \geq N$, pour tout $q \geq N$ et pour tout $x \in I$, $|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$. On fait tendre q vers $+\infty$. On obtient que pour tout $p \geq N$ et pour tout $x \in I$, $|f_p(x) - f(x)| < \varepsilon$. On a démontré que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

Réciproquement, supposons que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une certaine fonction f. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, pour tout $x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$.

Pour tous $p, q \geq N$, on a

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f_q(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

■

THÉORÈME 1.12. *On suppose que pour tout n, f_n est continue au point $x_0 \in I$. Si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I, alors f est continue au point x_0.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I et Montrons que f est continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a à la fois $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ et $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3$.

Par ailleurs, comme f_N est continue, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3.$$

On a donc, pour tout $x \in I$ tel que $|x - x_0| < \eta$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

■

COROLLAIRE 1.13 (Corollaire). *On suppose que pour tout n, f_n est continue sur I. Si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I, alors f est continue sur I.*

Remarque 1.14. Ce critère permet de dire directement dans le cas d'une suite de fonctions continues et convergeant simplement vers une fonction f non continue que la convergence n'est pas uniforme.

Par exemple, pour $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$. On a déjà vu que cette suite converge simplement vers f définie par $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1[$, $f(1) = 1$. Chaque f_n est continue sur $[0, 1]$ mais f n'est pas continue sur $[0, 1]$. On peut donc dire d'après ce théorème que la convergence n'est pas uniforme.

THÉORÈME 1.15. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur I. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I. Alors pour tous $a < b \in I$, la suite numérique $(\displaystyle\int_a^b f_n(t)dt)_n$ converge et on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

DÉMONSTRATION. Pour $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned} |\int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt| &\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|dt \\ &\leq \int_a^b (\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|)dt \\ &= (b-a) \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

Par hypothèse, la suite numérique $(\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|)_n$ converge vers 0. D'après le théorème des gendarmes, on déduit que $| \int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt|$ converge vers 0. Autrement dit, $(\int_a^b f_n(t)dt)_n$ converge vers $\int_a^b f(t)dt$.

■

THÉORÈME 1.16. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On suppose que*

(i) *Il existe $a \in I$ tel que $f_n(a)$ converge vers un nombre l,*

(ii) *$(f'_n)_n$ converge uniformément sur I vers une fonction g (ce qui implique que g est continue sur I).*

Alors la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers la fonction f définie sur I par

$$f(x) = l + \int_a^x g(t)dt.$$

En particulier, f est dérivable sur I et $f' = g$.

DÉMONSTRATION. Du fait de la continuité de f'_n, les fonctions f_n peuvent être définies de la manière suivante :

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t)dt.$$

D'après le théorème précédent, comme f_n' converge uniformément vers g sur I, on a, pour tout $x \in I$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n'(t)dt = \int_a^x g(t)dt \quad \text{et} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = l + \int_a^x g(t)dt.$$

■

THÉORÈME 1.17 (Théorème de Dini). *Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions numériques définies sur K et f une fonction définie sur K telles que*

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur K ;*
- *f est continue sur K ;*
- *Pour tout $x \in K$, la suite $(f_n(x))_n$ est monotone.*

Si $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur K, alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur K.

DÉMONSTRATION. Quitte à remplacer f_n par $-f_n$, on peut supposer que pour tout $x \in K$, la suite $(f_n(x))_n$ est décroissante.

Procédons pas contraposée et supposons que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur K. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ et il existe $N_n \geq n \in \mathbb{N}$ tel que $|f_{N_n}(x_n) - f(x_n)| = f_{N_n}(x_n) - f(x_n) \geq \varepsilon$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \geq m$, on a donc

$$f_m(x_n) - f(x_n) \geq f_n(x_n) - f(x_n) \geq f_{N_n}(x_n) - f(x_n) \geq \varepsilon.$$

Or, par compacité de K, il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})_n$ qui converge vers $x \in K$. En supposant par souci de simplicité que $(x_n)_n$ converge vers x et en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient, pout tout $m \in \mathbb{N}$,

$$f_m(x) - f(x) \geq \varepsilon.$$

Enfin, en faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient que $(f_m(x))_m$ ne converge pas vers $f(x)$, autrement dit que la suite ne converge pas simplement vers f. ■

2. Séries de fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On se donne une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq n_0}$ définie sur I.

Définition 2.1.

On appelle série de fonctions notée $\sum_{n\geq n_0} f_n$ la suite de fonctions $(F_N)_{N\geq n_0}$ où F_N est définie sur I par

$$F_N(x) = \sum_{n=n_0}^{N} f_n(x).$$

Exemple 2.2. On considère la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ définie sur $I = [0, 1]$ par $f_n(x) = x^n$.

$$F_N(x) = \sum_{n=0}^{N} x^n.$$

3. Convergence simple et convergence uniforme

Définition 3.1 (Convergence simple).

On dit que la série $\sum_{n\geq n_0} f_n$ converge simplement sur I si la suite de fonctions des sommes partielles $(F_N)_{N\geq n_0}$ converge simplement sur I. Autrement dit, la série converge si, pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum_{n\geq n_0} f_n(x)$ converge.

On note alors $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ la fonction définie sur I par

$$(\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n)(x) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x) = \lim_{N\to+\infty} F_N(x).$$

Définition 3.2 (Convergence uniforme).

On dit que la série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur I si la suite de fonctions $(F_N)_{N\geq n_0}$ converge uniformément sur I.

PROPOSITION 3.3.

Si la série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur I, alors elle converge simplement sur I.

PROPOSITION 3.4.

(i) *Si la série $\sum_n f_n$ converge simplement sur I, alors la fonction f_n converge simplement vers la fonction nulle sur I.*

(ii) *Si la série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur I, alors la fonction f_n converge uniformément vers la fonction nulle sur I.*

DÉMONSTRATION. (i) Pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum_{n\geq n_0} f_n(x)$ converge. Donc la suite $(f_n(x))_{n\geq n_0}$ converge vers 0.

(ii) Supposons que la série converge uniformément sur I. Notons F sa somme, c'est-à-dire la fonction définie par $F(x) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$. On a, pour tout $x \in I$ et $n \geq n_0 + 1$,

$$f_n(x) = \sum_{k=n_0}^{n} f_k(x) - \sum_{k=n_0}^{n-1} f_k(x) = F_n(x) - F_{n-1}(x).$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$|f_n(x)| \leq |F_n(x) - F(x)| + |F_{n-1}(x) - F(x)|.$$

On en déduit que

$$\sup_{x\in I} |f_n(x)| \leq \sup_{x\in I} |F_n(x) - F(x)| + \sup_{x\in I} |F_{n-1}(x) - F(x)|.$$

D'après la convergence uniforme de la suite de fonctions $(F_N)_{N\geq n_0}$, les deux termes de droite tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc le terme de gauche aussi; ce qui veut dire que f_n converge uniformément vers 0 sur I.

■

PROPOSITION 3.5.

La série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si

(i) *$\sum_n f_n$ converge simplement sur I,*

(ii) *la suite de fonctions $(R_N)_N$ définie comme le reste d'ordre n : $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.*

DÉMONSTRATION. Supposons que la série converge. Notons $F = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Pour tout $x \in I$, on a :

$$R_N(x) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_k(x) - \sum_{n=n_0}^{N} f_k(x) = F(x) - F_N(x).$$

$(R_N)_{N\geq n_0}$ converge uniformément vers 0 ssi $\sup_{x\in I} |R_N(x)| \to 0$ ssi $\sup_{x\in I} |F(x) - F_N(x)| \to 0$ ssi $(F_N)_{N\geq n_0}$ converge uniformément vers F.

■

THÉORÈME 3.6 (Critères de Cauchy).

(i) *La série $\sum_n f_{n\geq n_0}$ converge simplement sur I ssi la suite de fonctions $(F_N)_{N\geq n_0}$ vérifie le critère de Cauchy simple pour les suites de fonctions, c'est à dire si*

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \textit{ tel que } q > p \geq N \Rightarrow |\sum_{n=p+1}^{q} f_n(x)| < \varepsilon.$$

(ii) *La série $\sum_n f_{n\geq n_0}$ convergente uniformément sur I ssi la suite de fonctions $(F_N)_{N\geq n_0}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme pour les suites de fonctions, c'est à dire si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \textit{ tel que } q > p \geq N \Rightarrow \sup_{x\in I} |\sum_{n=p+1}^{q} f_n(x)| < \varepsilon.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que

$$F_q(x) - F_p(x) = \sum_{n=n_0}^{q} f_n(x) - \sum_{n=n_0}^{p} f_n(x) = \sum_{n=p+1}^{q} f_n(x)$$

et d'appliquer les résultats analogues sur les suites de fonctions. ■

Définition 3.7 (Convergence normale).

On dit que la série $\sum_{n\geq n_0} f_n$ converge normalement sur I s'il existe une suite numérique positive $(u_n)_{n\geq n_0}$ telle que

(i) la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est convergente,
(ii) pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leq u_n$,

PROPOSITION 3.8. *La série $\sum_{n\geq n_0} f_n$ converge normalement sur I ssi la série numérique $\sum_{n\geq n_0} (\sup_{x\in I} |f_n(x)|)$ converge.*

THÉORÈME 3.9.

Si la série $\sum_n f_n$ converge normalement sur I, alors elle converge uniformément sur I.

DÉMONSTRATION. Supposons que la série converge normalement sur I. C'est-à-dire qu'il existe une série convergente à termes positifs $\sum_n u_n$ telle que, pour tout n et pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leq u_n$. Montrons que la série vérifie alors le critère de Cauchy uniforme.

Soit $\varepsilon > 0$. La série numérique $\sum_n u_n$ vérifie le critère de Cauchy donc il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$M \leq p < q \Rightarrow \sum_{n=p+1}^{q} u_n < \varepsilon.$$

Pour $M \leq p < q$, on a alors

$$\sup_{x\in I} |\sum_{n=p+1}^{q} f_n(x)| \leq \sup_{x\in I} \sum_{n=p+1}^{q} |f_n(x)| \leq \sum_{n=p+1}^{q} u_n < \varepsilon.$$

■

PROPOSITION 3.10 (Règle d'Abel simple).
Soient $(f_n)_{n\geq n_0}$ et $(g_n)_{n\geq n_0}$ deux suites de fonctions définies sur I. On suppose que

(i) *pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\geq n_0}$ est décroissante,*
(ii) *la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq n_0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur I,*
(iii) *Pour tout $x \in I$, il existe $M > 0$ tel que : pour tout $k \geq n_0$, $|\sum_{n=n_0}^{k} g_n(x)| \leq M$.*

Alors, la série de fonctions $\sum_{n\geq n_0} f_n g_n$ converge simplement sur I.

PROOF. Pour tout $x \in I$, il suffit d'appliquer le critère d'Abel pour la série numérique $\sum_{n\geq n_0} f_n(x)g_n(x)$. ■

THÉORÈME 3.11 (Règle d'Abel uniforme). *Soient $(f_n)_{n\geq n_0}$ et $(g_n)_{n\geq n_0}$ deux suites de fonctions définies sur I. On suppose que*

(i) *pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\geq n_0}$ est décroissante,*
(ii) *la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq n_0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I,*
(iii) *Il existe $M > 0$ tel que : pour tout $k \geq n_0$ et pour tout $x \in I$, $|\sum_{n=n_0}^{k} g_n(x)| \leq M$.*

Alors, la série de fonctions $\sum_{n\geq n_0} f_n g_n$ converge uniformément sur I.

DÉMONSTRATION. Les hypothèses sont plus fortes que dans la règle d'Abel simple. Donc la série $\sum_{n\geq n_0} f_n(x)g_n(x)$ converge sipmlement sur I. Il suffit alors de montrer que la suite de fonctions $(R_n)_{n\geq n_0}$, où $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)g_n(x)$, converge uniformément vers 0 sur I.

Soit $m \geq n+1$ et $x \in I$. Pour $n \geq n_0$, on pose $G_n(x) = \sum_{k=n_0}^{n} g_k(x)$. On applique la sommation d'Abel :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)g_k(x) &= \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)[G_k(x) - G_{k-1}(x)] \\ &= \sum_{k=n+1}^{m-1} [f_k(x) - f_{k+1}(x)]G_k(x) + f_m(x)G_m(x) - f_{n+1}G_n(x).\end{aligned}$$

$$|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)g_k(x)| \leq M\left(\sum_{k=n+1}^{m-1} [f_k(x) - f_{k+1}(x)] + f_m(x) + f_{n+1}(x)\right) = 2Mf_{n+1}(x).$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, on en déduit que pour tout $x \in I$,

$$|R_n(x)| \leq 2M f_{n+1}(x).$$

Donc

$$\sup_{x\in I} |R_n(x)| \leq 2M \sup_{x\in I} f_{n+1}(x) \to_{n\to+\infty} 0.$$

■

Lorsqu'une série $\sum_{n\geq n_0} f_n$ est (simplement) convergente sur I, on notera $\sum_{n\geq n_0}^{+\infty} f_n$ sa somme, c'est-à-dire la fonction définie sur I par

$$(\sum_{n\geq n_0}^{+\infty} f_n)(x) = \sum_{n\geq n_0}^{+\infty} f_n(x).$$

THÉORÈME 3.12. *Soit* $(\sum_n f_n)$ *une série uniformément convergente sur* I. *On suppose que pour tout* n, f_n *est continue sur* I. *Alors, la somme* $\sum_{n\geq n_0}^{+\infty} f_n$ *de la série est continue sur* I.

DÉMONSTRATION. Pour tout N, $F_N = \sum_{n=n_0}^{N}$ est continue sur I comme somme de fonctions continues. F_N converge uniformément vers $\sum_{n\geq n_0}^{+\infty} f_n$ sur I. Donc $\sum_{n\geq n_0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I. ■

THÉORÈME 3.13 (Intégration terme à terme).
Soit $(\sum_{n\geq n_0} f_n)$ *une série uniformément convergente sur* I. *On suppose que pour tout* n, f_n *est continue sur* I. *Alors, pour tous* $a, b \in I$ *avec* $a < b$, *la série numérique* $\sum_{n\geq n_0} \int_a^b f_n(t)dt$ *converge et*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt.$$

DÉMONSTRATION. On a, pour tout $N \geq n_0$,

$$\sum_{n=n_0}^{N} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \sum_{n=n_0}^{N} f_n(t)dt = \int_a^b F_N(t)dt.$$

Mais la suite de fonctions $(F_N)_{N\geq n_0}$ converge uniformément vers $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$. Donc, quand $N \to +\infty$,

$$\sum_{n=n_0}^{N} \int_a^b f_n(t)dt \to \int_a^b (\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(t))dt.$$

■

4. Dérivation terme à terme

THÉORÈME 4.1 (Dérivation terme à terme).
Soit $\sum_{n\geq n_0} f_n$ *une série de fonctions telle que*

(i) *Pour tout* $n \geq n_0$, f_n *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I,
(ii) *il existe* $c \in I$ *telle que la série numérique* $\sum_{n\geq n_0} f_n(c)$ *converge,*

(iii) *la série de fonctions* $\sum_{n\geq n_0} f'_n$ *converge uniformément sur* I.

Alors, la série de fonctions $\sum_{n\geq n_0} f_n$ *converge simplement sur* I *vers la fonction*

$$F(x) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(c) + \int_c^x (\sum_{n=n_0}^{+\infty} f'_n(t))dt.$$

En particulier, sa somme $F = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I *et*

$$F' = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f'_n.$$

Autrement dit, pour tout $x \in I$*,*

$$(\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n)' = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f'_n(x).$$

DÉMONSTRATION. Remarquons que pour tout N, $F_N = \sum_{n=n_0}^{N} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. De plus, $F'_N = \sum_{n=n_0}^{N} f'_n$ converge uniformément vers G Alors la suite $(F_N)_N$ converge simplement vers la fonction F définie sur I par

$$F(x) = \sum_{n=n_0} f_n(x_0) + \int_{x_0}^x G(t)dt.$$

$\blacksquare$